令和５年度

理　学　部

化学生物環境学科 環境科学コース

第３年次編入学者選抜学力試験問題

数　　学

令和４年６月１１日（土）

１０：３０〜１１：３０

注　　意

１．解答は，問題ごとに，別添の解答用紙に書くこと。
　解答用紙が不足した人は手をあげてその旨を試験監督者に告げ，必要枚数の解答用紙を受け取ること。なお，解答用紙を追加した場合は，解答用紙の上方に問題番号を書くこと。
２．問題１と問題２は必ず両方共に解答すること。
３．総 ペ ー ジ――――４ページ
　　問題ページ――――第２〜４ページ
　　（第１ページは，白紙）
４．試験終了後，この問題冊子と下書き用紙は持ち帰ること。

問題1

n を0以上の整数とし，$F_{n+2} = F_{n+1} + 2F_n$ の漸化式を満たす数列 F_n について考える。ただし，$F_0 = 0, F_1 = 1$ である。

問1　F_4 の値を計算せよ。

問2　F_n の一般解を以下の手順で求めよ。

1) $\boldsymbol{v}_n = \begin{pmatrix} F_{n+1} \\ F_n \end{pmatrix}$ と置いた場合，式 (1) における 2×2 行列 A を求めよ。

$$\boldsymbol{v}_{n+1} = A\boldsymbol{v}_n \tag{1}$$

2) 行列 A のすべての固有値と，各固有値に対する固有ベクトルを求めよ。

3) $\boldsymbol{v}_0$ を固有ベクトルの線型結合で表せ。

4) F_n の一般解を求めよ。

問題2

$F(x,y) = 4x - x^2 - xy, \quad G(x,y) = 6y - xy - 3y^2$ とし，微分方程式

$$\frac{dx}{dt} = F(x,y)$$
$$\frac{dy}{dt} = G(x,y)$$

について考える。

問1　偏微分 $\dfrac{\partial F}{\partial x}, \dfrac{\partial F}{\partial y}, \dfrac{\partial G}{\partial x}, \dfrac{\partial G}{\partial y}$ を求めよ。

問2　2変数連続力学系 (連立微分方程式)

$$\frac{dx}{dt} = F(x,y)$$
$$\frac{dy}{dt} = G(x,y)$$

の平衡点は

$$F(x,y) = 0$$
$$G(x,y) = 0$$

を同時にみたす (x,y) の組である。4つの平衡点のうち $x > 0, y > 0$ となるものを求めよ。

ヒント　$F(x,y), G(x,y)$ の式はそれぞれ因数分解可能である。

問3　$x > 0, y > 0$ となる平衡点を $(\overline{x}, \overline{y})$ とおく．平衡点 $(\overline{x}, \overline{y})$ からの (x,y) のずれを (p,q) とおく。ずれが小さいとき，ずれの2次以上の項を無視すると，ずれの時間変化は以下の微分方程式で記述される。

$$\frac{dp}{dt} = \frac{\partial F}{\partial x}(\overline{x}, \overline{y})\,p + \frac{\partial F}{\partial y}(\overline{x}, \overline{y})\,q$$
$$\frac{dq}{dt} = \frac{\partial G}{\partial x}(\overline{x}, \overline{y})\,p + \frac{\partial G}{\partial y}(\overline{x}, \overline{y})\,q$$

ここで $\dfrac{\partial F}{\partial x}(\overline{x}, \overline{y})$ は $\dfrac{\partial F}{\partial x}$ の (x,y) に $(\overline{x}, \overline{y})$ を代入したものである。$\dfrac{\partial F}{\partial x}(\overline{x}, \overline{y}), \dfrac{\partial F}{\partial y}(\overline{x}, \overline{y}), \dfrac{\partial G}{\partial x}(\overline{x}, \overline{y}), \dfrac{\partial G}{\partial y}(\overline{x}, \overline{y})$ を計算し，上の微分方程式の右辺の p, q の係数を数値に直した微分方程式を書け。

問4　p, q が問3の微分方程式に従うとき，$r = p + \sqrt{3}q$ は微分方程式

$$\frac{dr}{dt} = -\left(3 + \sqrt{3}\right) r$$

に従うことを示せ。

問5　r の初期値を $r(0)=r_0$ とし，変数分離法により問4の r の微分方程式の解を求めよ。なお $r_0=0$ の解は微分方程式の特解に対応する。

問6　p,q が問3の微分方程式に従うとき，$s=p-\sqrt{3}q$ のみたす微分方程式とその解を求めよ。

問7　平衡点からの小さなずれが時間とともに0に近づくとき，平衡点は漸近安定であるという．平衡点 $(\overline{x},\overline{y})$ が漸近安定であること（$\lim_{t\to\infty}p(t)=0,\lim_{t\to\infty}q(t)=0$）を示せ。ただし，平衡点からの小さなずれ p,q は，ずれの2次以上の項を無視した問3の微分方程式に従うとする。