

令和5年度

理学部

数物科学科 数学コース

第3年次編入学者選抜学力試験問題

数 学

令和4年6月11日(土)

10:00~11:30

注意事項

1. 解答用紙表紙の指定された箇所に、受験番号、氏名を記入すること。
受験番号は、受験票の受験番号欄に記入してあるとおりに書くこと。
指定された箇所以外には、受験番号・氏名を絶対に書かないこと。
2. A1~A3の全問を解答すること。
3. 解答は、別冊子の解答用紙に記入すること。
解答用紙左上の問題番号を確認し、問題に対応する解答用紙に記入すること。
4. 各問題の解答用紙(両面)はそれぞれ1枚ある。
5. 問題冊子の総ページ数————— 2ページ
問題ページ————— 第2ページ
(第1ページは白紙)
6. 試験終了後、この問題冊子は持ち帰ること。

A1 a を実数とする. 3次元実ベクトル空間 \mathbf{R}^3 における写像 $f: \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3$ を行列

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

を用いて

$$f(\mathbf{v}) = A\mathbf{v}, \quad \mathbf{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

と定める. このとき, 以下の問いに答えよ.

- (1) $\text{Im } f$ の次元を求めよ.
- (2) $\text{Im } f$ が平面であるとき, この平面の方程式を求めよ.

A2 $(-\infty, \infty)$ で定義された関数 $\sin x$ について, $x = 0$ のまわりにおけるテイラー展開を $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ とおく. このとき, 以下の問いに答えよ. ただし, $r(x) = \sum_{n=4}^{\infty} a_n x^n$ について $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{r(x)}{x^3} = 0$ が成り立つことを用いてもよい.

- (1) a_0, a_1, a_2, a_3 を求めよ.
- (2) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\sin x - x + \frac{1}{3}x^3 \right) \frac{1}{x^3}$ を求めよ.
- (3) 関数

$$f(x) = \begin{cases} \left(\sin x - x + \frac{1}{3}x^3 \right) \frac{1}{x^2} & (x > 0) \\ 0 & (x = 0) \\ \left(-\sin x + x \right) \frac{1}{x^2} & (x < 0) \end{cases}$$

について, f が $x = 0$ で微分可能であることを示せ.

A3 以下の問いに答えよ.

- (1) $a < 1$ とする. $\int_0^a \log(1-t) dt$ を求めよ.
- (2) $\lim_{a \rightarrow 1-0} \int_0^a \log(1-t) dt$ を求めよ.
- (3) 区間 $(-\infty, 1)$ を定義域とする関数 $f(x) = \int_0^x \log(1-t) dt$ について, $y = f(x)$ のグラフ上の点 $(-1, f(-1))$ における接線の方程式を求めよ.
- (4) (3) で定めた関数 f について, $y = f(x)$ のグラフの概形を描け.