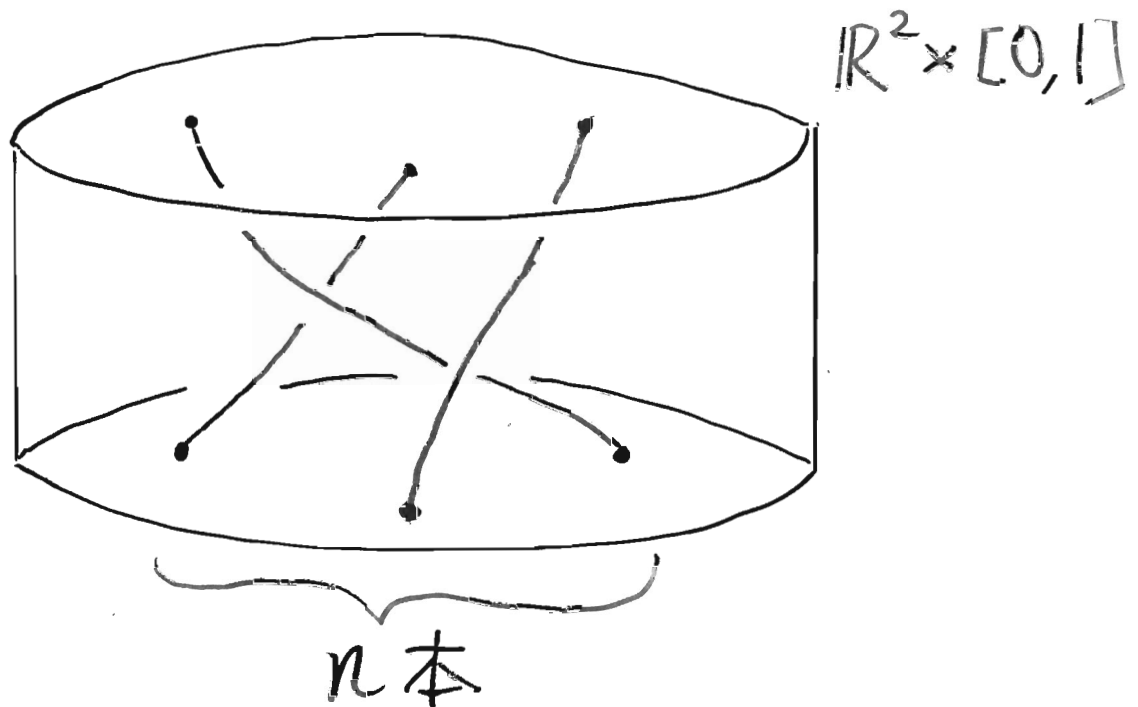


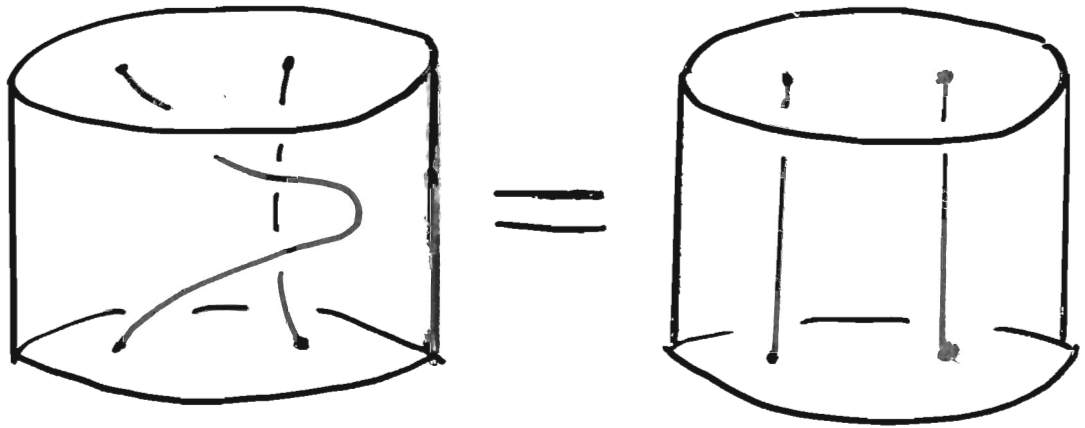
几次 braid (組みひも)



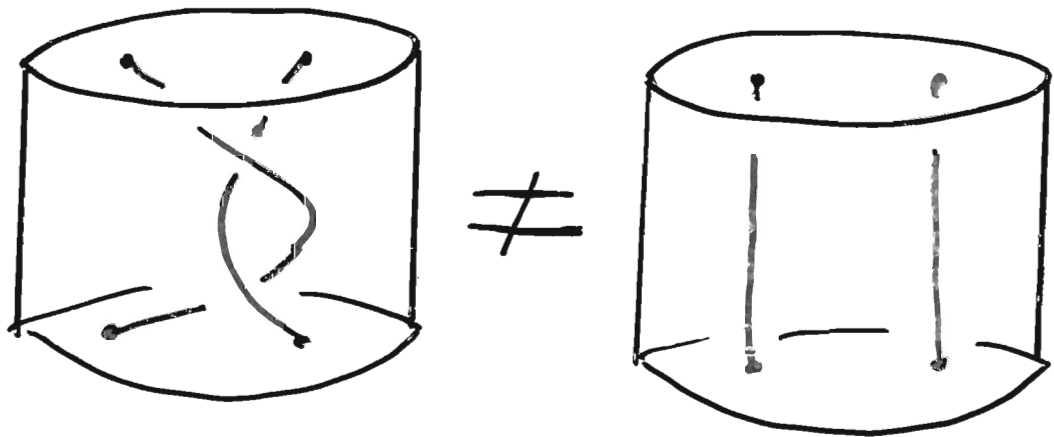
★ 各ひもの両端を固定したまま
連続変形で移り合う2つの
braid は同じものとみなす

★ ひもの両端の集合 ($\subset \mathbb{R}^2$) を
基点とよぶことにする.

例



同じ組むも



異なる組むも

$\mathbb{R}^2 \supset S$: 点集合

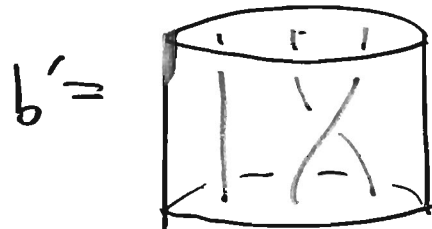
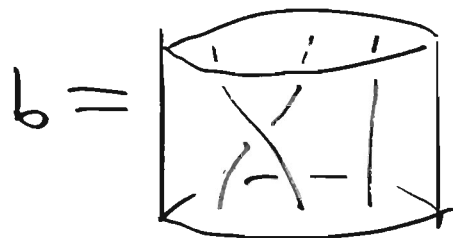
$B_n(S) = \left\{ S \text{ を基点とする} \right.$
 $\left. n \text{ 次 braid} \right\}$

は群をなす.

積 $b, b' \in B_n(S)$

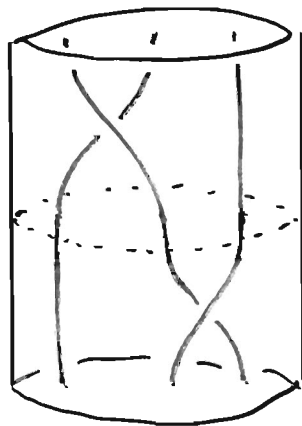
$b \cdot b' =$ 「 b' を b の下に吊るしてできる braid」

例.



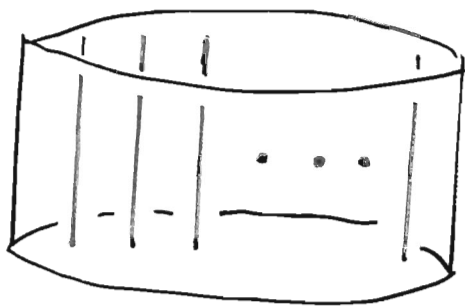
\Rightarrow

$b \cdot b' =$

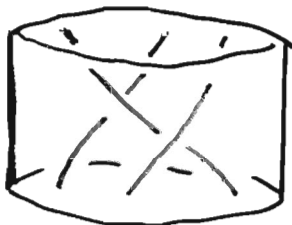


単位元

$e =$

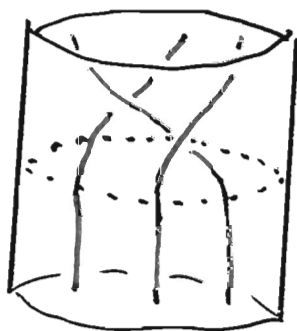


$b =$

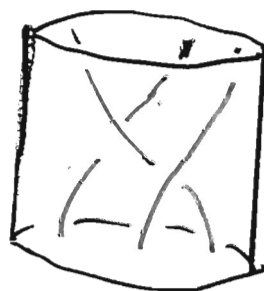


のとき

$b \cdot e =$



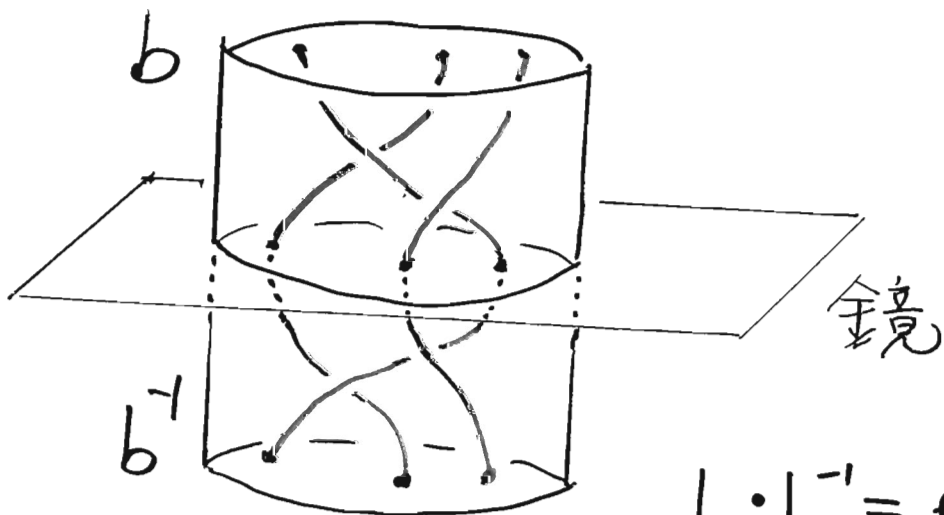
$=$



$= b$

逆元

b の逆元 $b^{-1} = b$ の鏡像



$b \cdot b^{-1} = e$

となる

組ひも群の構造

$$i = 1, 2, \dots, n-1$$

$$\sigma_i = \left| \begin{array}{c} \dots \\ \vdots \\ \dots \end{array} \right| \begin{array}{c} \diagdown \\ \diagup \end{array} \left| \begin{array}{c} \dots \\ \vdots \\ \dots \end{array} \right|$$

i
 $i+1$
 n

$$\sigma_i^{-1} = \left| \begin{array}{c} \dots \\ \vdots \\ \dots \end{array} \right| \begin{array}{c} \diagup \\ \diagdown \end{array} \left| \begin{array}{c} \dots \\ \vdots \\ \dots \end{array} \right|$$

B_n は $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{n-1}$ で生成された

基本関係式:

$$\begin{cases} \sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i = \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1} \\ \sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i & |i-j| > 1 \end{cases}$$

$$\sigma_1 \sigma_2 \sigma_1$$

$$\sigma_2 \sigma_1 \sigma_2$$

$$\sigma_1 \sigma_3$$

$$\sigma_3 \sigma_1$$

full twist braid θ_n

$$\theta_n = (\sigma_1 \sigma_2 \cdots \sigma_{n-1})^n$$

$$= \left[\begin{array}{c} \text{diagram of } \sigma_1 \sigma_2 \cdots \sigma_{n-1} \end{array} \right]^n$$

例 $\theta_2 = \text{diagram of } \sigma_1^2$ $\theta_3 = \text{diagram of } (\sigma_1 \sigma_2)^3$

○ θ_n は B_n の中心 ($\cong \mathbb{Z}$) の生成元
である ($n \geq 3$)

• 群 G の中心 = $\{g \in G \mid gk = kg, \forall k \in G\}$

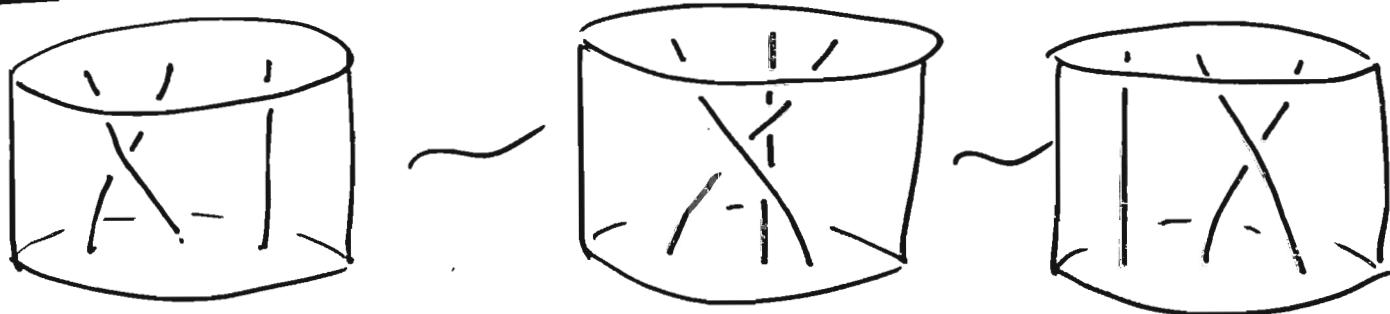
braid type (組ひも型)

$b \in B_n(S)$, $b' \in B_n(S')$

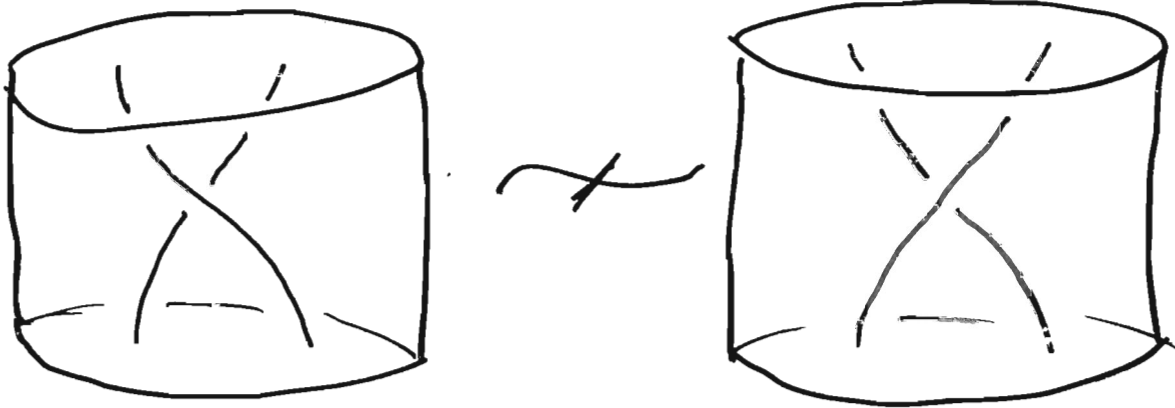
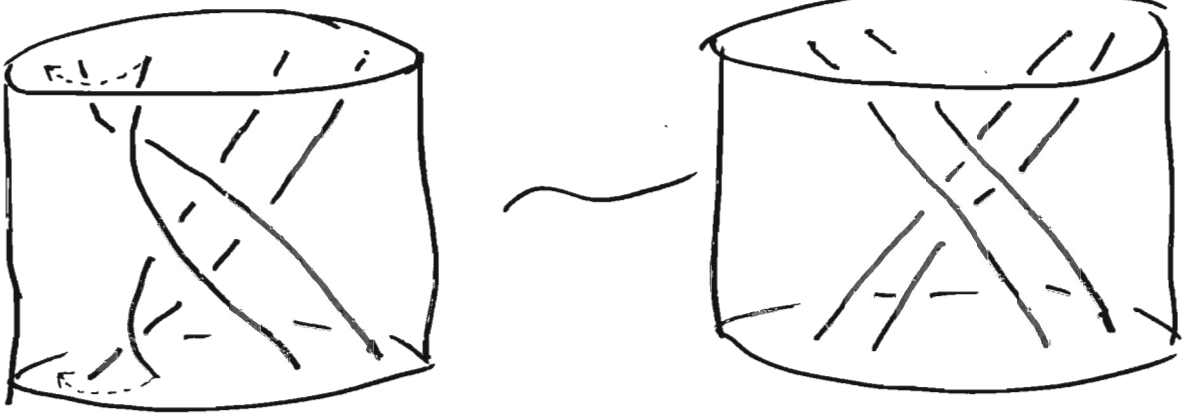
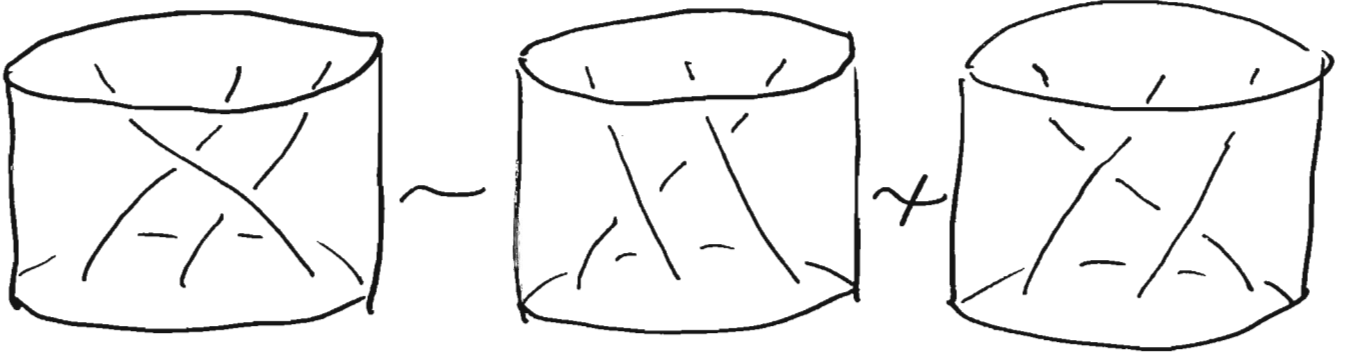
$b \sim b'$ (タイプが等しい)

$\Leftrightarrow b$ を連続的に変形して b' に
できました (勿論、基点は動かしても
よい)

例



b の同値類 $\{b' \mid b' \sim b\}$ を
 n 次 braid type といい、 $[b]$ と表す

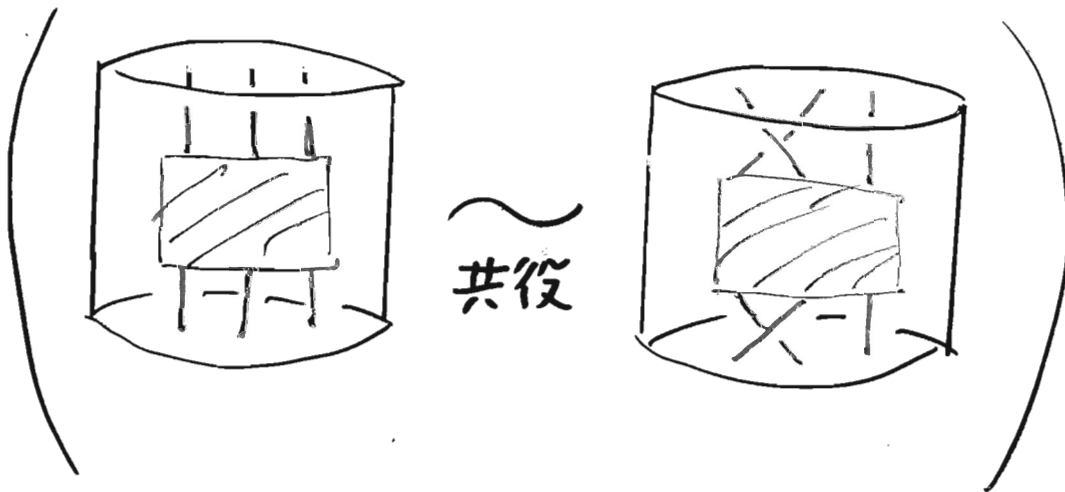


$$BT_n = \{n\text{-次 braid type}\}$$

$$= \left(\bigcup_S B_n(S) \right) / \sim$$

★ $b, b' \in B_n(S)$ 同一の基点の場合

$$b \sim b' \Leftrightarrow b \underset{\text{共役}}{\sim} b'$$



$$BT_n = B_n(S) / \text{共役}$$

2次元力学系

D : 円板

$f: D \rightarrow D$ 連続, 1対1

S : 有限不変集合

($\#S < \infty$, $f(S) = S$)

S に対し, その組ひも型 (braid type) を定義する.

$f_t: D \rightarrow D$ ($0 \leq t \leq 1$) を恒等写像から f へのイソトピーとする

(i.e. f_t : 1対1 連続, $f_0 = \text{id}$, $f_1 = f$)

★ このようなイソトピーは常に存在する

定義

空間 $D \times [0, 1]$ 内の n 本の曲線の組

$$\bigcup_{0 \leq t \leq 1} (f_t(S) \times \{t\})$$

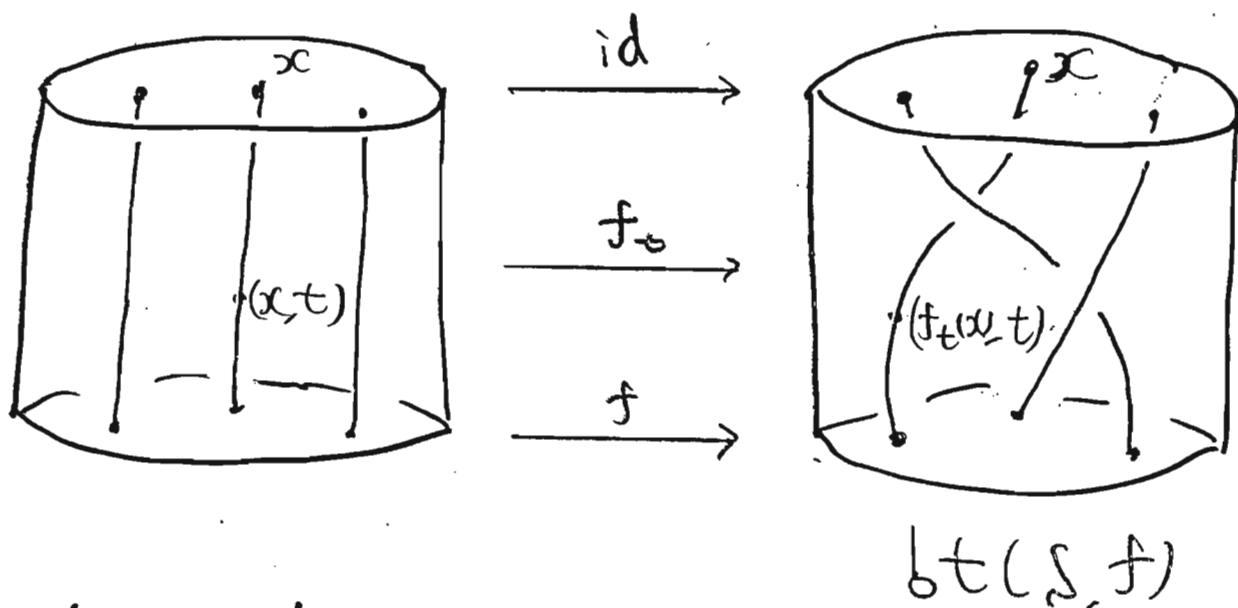
は n 次 braid となる。これを定めた

braid type を

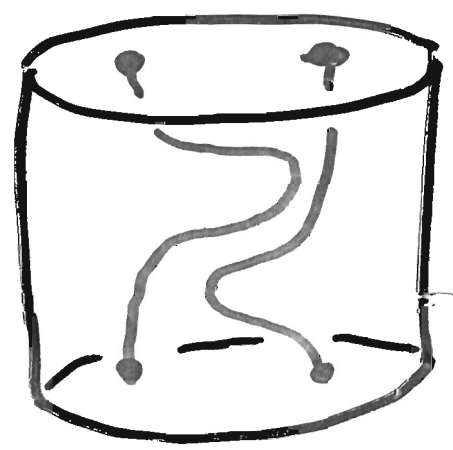
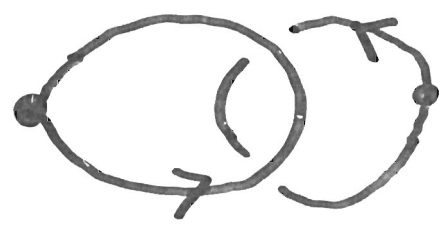
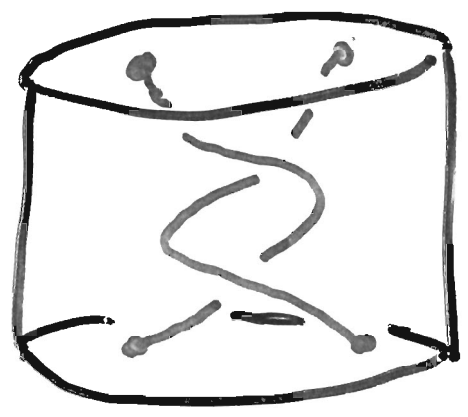
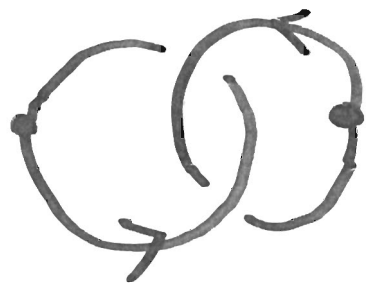
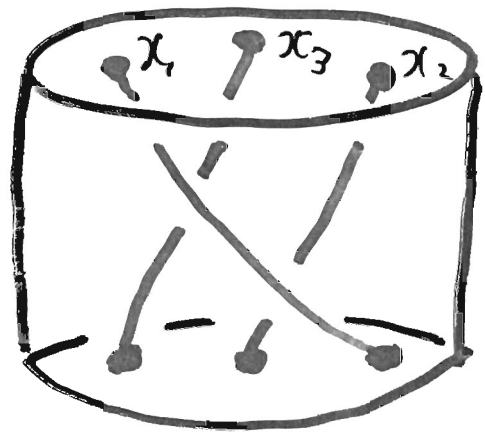
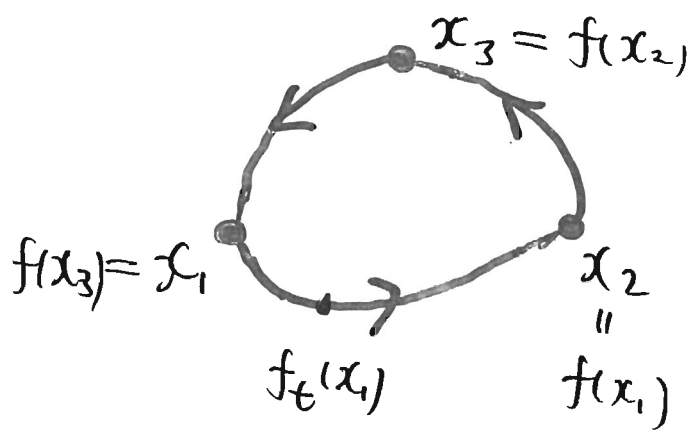
$$bt(S, f; \{f_t\}) \text{ 又は } bt(S, f), bt(S)$$

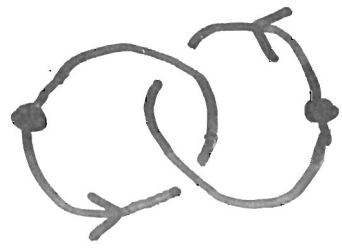
とかく。

★ $bt(S, f)$ は full-twist braid のときを除いて unique に定まる

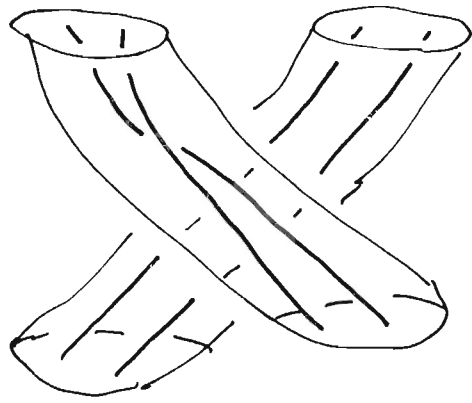


• 各ひもは、曲線 $(f_t(x), t)$ の軌跡

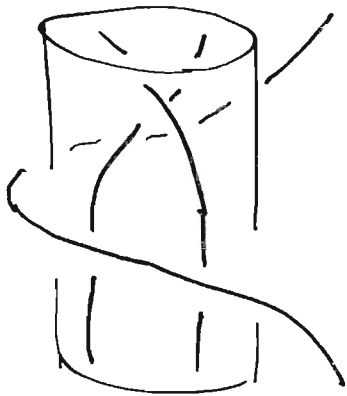
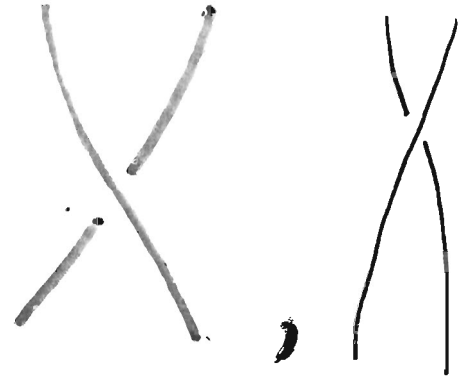


注  はありえない

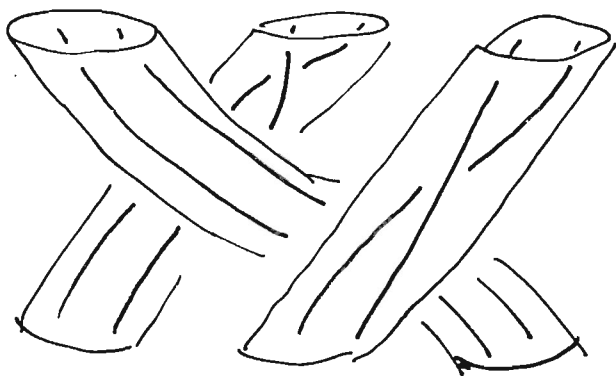
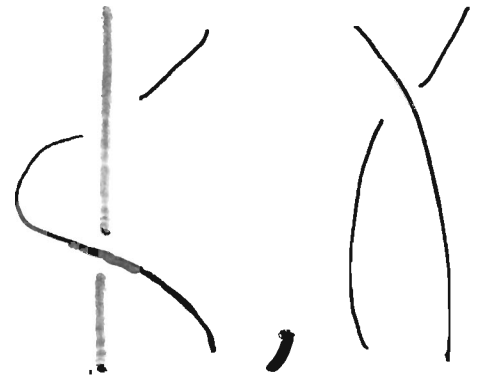
braid type の既約分解



⇒
分解



⇒
分解

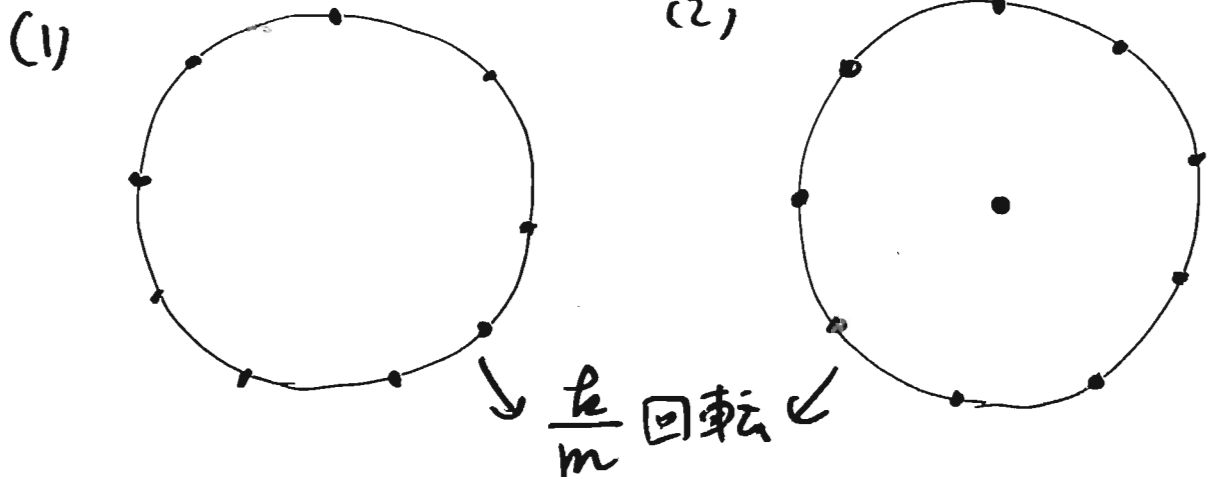


分解
⇒



分解不可能であるものを既約
という

定義 次の braid type を周期的
braid type という



定義 周期的でない既約 braid type
を擬アノソフ型 (pseudo-Anosov)
という

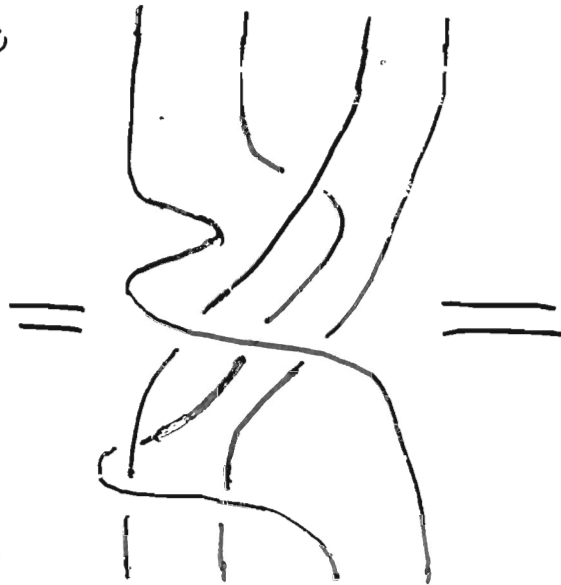
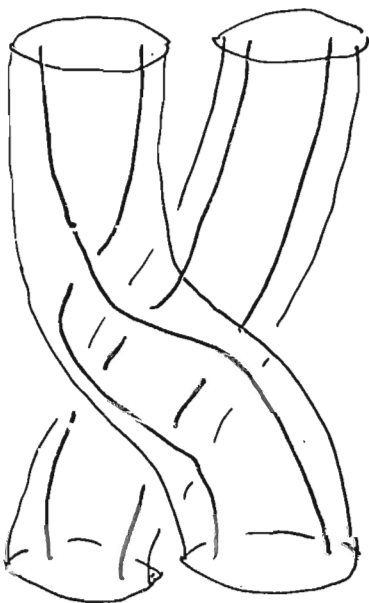
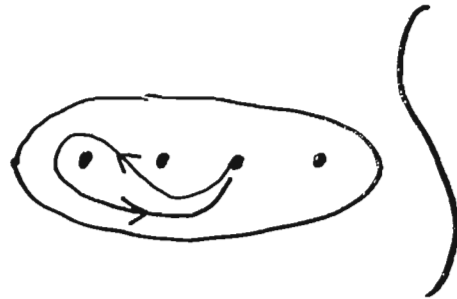
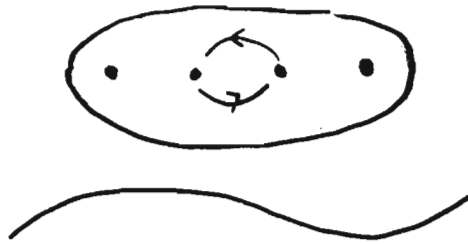
定理 (Thurston) f の不変集合 S で
 $bt(S, f)$ が PA 成分を含むものが存在
 $\Rightarrow \begin{cases} h(f) > 0 & (\text{トポロジカル・エントロピー}) \\ \#\{\text{周期点}\} = \infty \end{cases}$

一般に braid type の分解は困難

例



は分解できる



定理 (Boyland)

β : n 次 braid type, n : 素数, β : cyclic

$e(\beta)$ は $(n-1)$ の倍数でない

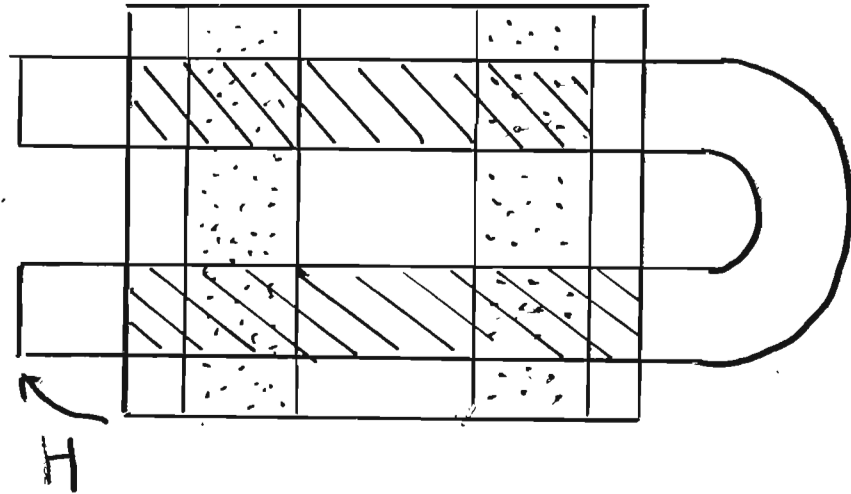
$$(\beta = \sigma_{i_1}^{\varepsilon_1} \cdots \sigma_{i_r}^{\varepsilon_r} \Rightarrow e(\beta) = \varepsilon_1 + \cdots + \varepsilon_r)$$

$\Rightarrow \beta$ は PA

★ $n=3$ のとき. $e(\beta)$ は常に偶数だから.
定理の仮定は成り立たない.

★ braid を分解する アルゴリズム が あり

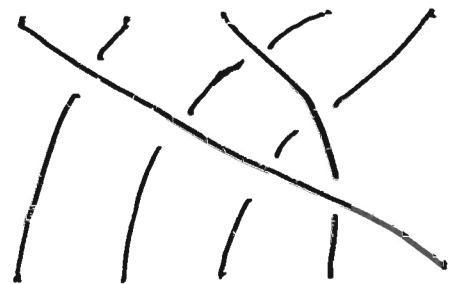
horse-shoe 写像 H



{ H の周期点} $\xleftrightarrow{1:1}$ {0, 1 からなる周期的数列}

周期数列 (10010), (10011) に対応する
周期軌道の braid type は

$$\beta = \sigma_1 \sigma_3 \sigma_2 \sigma_4 \sigma_3 \sigma_4 =$$



$$e(\beta) = 6 \not\equiv 0 \pmod{4} \quad \text{よって } \beta \text{ は PA}$$

\parallel
 $n-1$

定理 (M, 1986)

$n=3$ のとき,

β が pA

$$\Leftrightarrow \beta = [\theta_3^m \sigma_1^{i_1} \sigma_2^{-j_1} \cdots \sigma_1^{i_d} \sigma_2^{-j_d}]$$

(m : 整数, $i_1, j_1, \dots, i_d, j_d$ は正数)

θ_3 : full-twist braid

例 $\beta = [\sigma_1 \sigma_2^{-1}] = \begin{array}{c} \diagdown \\ \diagup \end{array} : pA$

$$\beta = [\sigma_1 \sigma_2 \sigma_2 \sigma_1 \sigma_1 \sigma_2] = \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} : pA$$

注: β が上の定理の条件を満たさない

$$\Leftrightarrow \beta = \sigma_1 \sigma_2, (\sigma_1 \sigma_2)^{-1}, \sigma_1 \sigma_2 \sigma_1, \sigma_1^i$$

(full-twist の積を除いて)

定理 f が $C^{1+\varepsilon}$ 級の時

$$h(f) > 0$$

$\Leftrightarrow f$ に pA 型周期軌道が存在

トポロジカル・エントロピーの定義

X : コンパクト距離空間

$f: X \rightarrow X$ 連続

$$h(f) := \log \left(\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \lim_{n \rightarrow \infty} \max_E \sqrt[n]{\#E} \right)$$

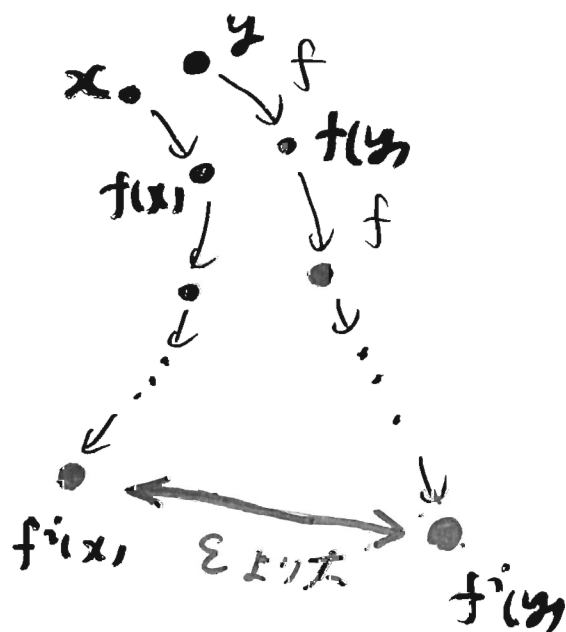
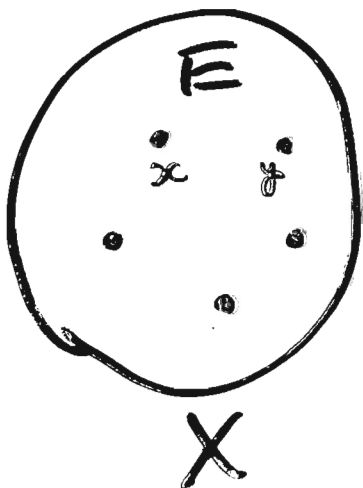
f のトポロジカル・エントロピー

E の条件

$\forall x, y \in E, x \neq y$ に対し、

$$d(f^i(x), f^i(y)) > \varepsilon$$

ε みたす i ($0 \leq i < n$) が存在」



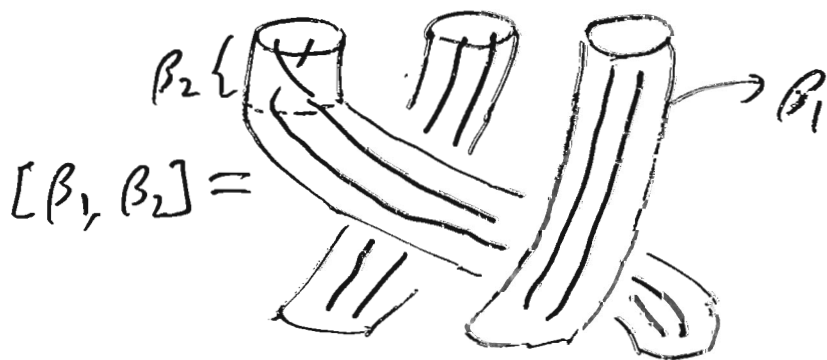
braid type と top. entropy

$$h(\beta) = \inf_f h(f)$$

f の条件: braid type が β の周期軌道を含む

定理

1. $h(\beta) > 0 \Leftrightarrow \beta$ は pA 成分を含む
2. $\beta_1 > \beta_2 \Rightarrow h(\beta_1) > h(\beta_2)$
3. $h([\beta_1, \beta_2]) = \max\{h(\beta_1), \frac{h(\beta_2)}{n}\}$



4. $h(\beta) \geq \begin{cases} \frac{\log 2}{n-1} & \beta = pA \quad '93 \\ \frac{\log(1+\sqrt{2})}{n} & \beta > pA \quad '99 \end{cases}$

最小イントロタイプ - 最も ρA n -braid type

$n=3$ $\sigma_1 \sigma_2^{-1}$ (Handel '99, M '86)

$n=4$ $\sigma_1 \sigma_2 \sigma_3^{-1}$ (Song, Ko Los '02)

$n=5$ $\rho \sigma_1^2$ ($\rho = \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 \sigma_4$)
(Ham, Song)



||

$\beta_{1,1}$



||

$\beta_{2,1}$



||

$\beta_{1,3} \times$

Burau 表現

$$R: B_n \rightarrow GL_{n-1}(\mathbb{Z}[t, t^{-1}])$$

$$R(\sigma_1) = \left(\begin{array}{c|c} -t & 1 \\ \hline 0 & 1 \end{array} \right)$$

$$R(\sigma_i) = \left(\begin{array}{c|cc|c} 1 & \dots & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ & t & -t & 1 & \\ & 0 & 0 & 1 & \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & 1 \end{array} \right) < i$$

$$R(\sigma_{n-1}) = \left(\begin{array}{c|c} 1 & \dots & 1 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & \\ & t & -t & \end{array} \right)$$

定理 (Fried, 1986)

$$h(\beta) \geq \log \max_{\substack{t \in \mathbb{C} \\ |t|=1}} \{R(\beta) \text{ の } z \text{ の } \rho \text{ の } \text{半径}\}$$

例 $\beta = \sigma_1 \sigma_2^{-1}$

$$R(\beta) = \begin{pmatrix} -t & 1 \\ -t & 1-t^{-1} \end{pmatrix}$$

$$\text{固有値} = \frac{1}{2} \left\{ t + \bar{t} - 1 \pm \sqrt{(t + \bar{t} - 1)^2 - 4} \right\}$$

|固有値| の大きい方

$$= \frac{1}{2} \left\{ |t + \bar{t} - 1| + \sqrt{(t + \bar{t} - 1)^2 - 4} \right\}$$

$$\leq \frac{1}{2} (3 + \sqrt{9 - 4}) = \frac{3 + \sqrt{5}}{2}$$

$$t = -1 \text{ のとき}$$

$$\therefore h(\sigma_1 \sigma_2^{-1}) \geq \log \frac{3 + \sqrt{5}}{2}$$

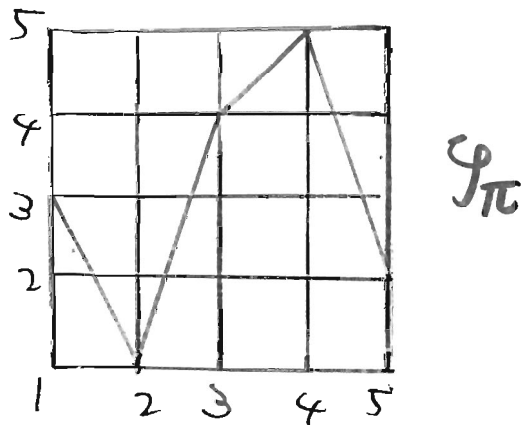
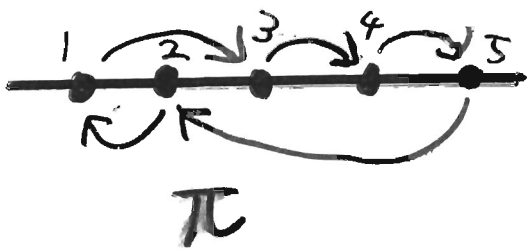
Young '81

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ \mathcal{S} : f の有限不変集合

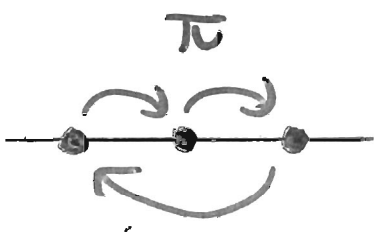
π : $f|_{\mathcal{S}}$ が定めた置換

$$\Rightarrow h(f) \geq \log \{M_{\pi} \text{ のスペクトル半径} \}$$

M_{π} は π が定めた区分解線形写像 φ_{π} の構造行列



$$M_{\pi} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$



$$M_{\pi} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$h(f) \geq \log(\text{黄金比}) > 0$$

pseudo-Anosov 写像

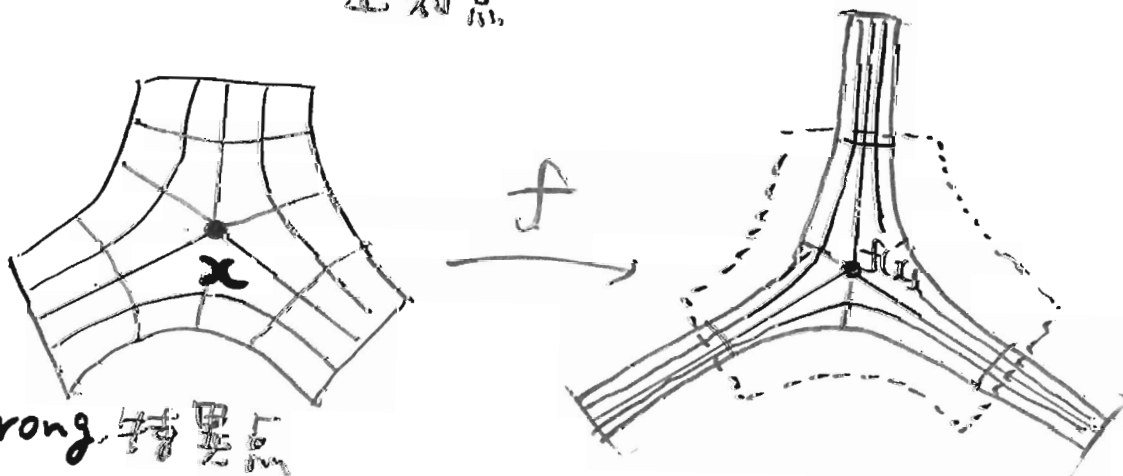
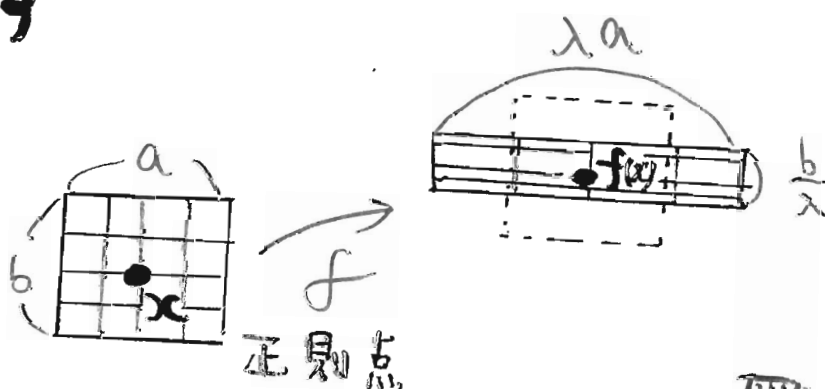
β pA braid type

$\Rightarrow \exists \varphi_\beta : \text{pA map s.t.}$

$\exists S : \text{有限不変集合 } \text{bt}(S) = \beta$
 $\{1\text{-prong 特異点}\} \subset S$

pA map は、ある定数 $\lambda > 1$ に對し、

各点で、 λ 倍に伸びる方向と $\frac{1}{\lambda}$ 倍に縮む方向をもつ、というものがあつた。ただし、特異点を許す



PA map の性質

1. $h(Y_\beta) = h(B) > 0$

2. f が braid type B の 不変集合 S を持つ

$\Rightarrow \{Y_\beta \text{ の周期軌道 } \subset S\} : \text{無限集合}$

$\exists \downarrow$ ^{D の内部で} 単射, braid type を保つ
 $\{f \text{ の周期軌道}\}$

自然数全体を次の順序に並べる

3, 5, 7, 9, 11, \dots , $2 \cdot 3$, $2 \cdot 5$, $2 \cdot 7$, $2 \cdot 9$, \dots
 \dots $2^2 \cdot 3$, $2^2 \cdot 5$, $2^2 \cdot 7$, \dots , $2^3 \cdot 3$, $2^3 \cdot 5$, $2^3 \cdot 7$, \dots
 $\dots \dots$ 2^3 , 2^2 , 2 , 1

Sharkovskii の定理 (1964)

f が n -周期点をもつ

$\Rightarrow n$ の右にある m に対し、 f は m -周期点をもつ

定理 (Bowen-Franks '76, Misiurewicz '79)

$h(f) > 0$

$\Leftrightarrow f$ は周期が 2 のべきでない周期点をもつ

★ 置換が (1234) である周期
軌道が存在

$\Rightarrow \forall n$: 自然数に対し n -周期
軌道が存在

定義 (forcing order)

π, π' : 巡回置換

$\pi \geq \pi'$

$\Leftrightarrow f$ が π 型の周期軌道をもつとは:
 π' 型の周期軌道をもつ?

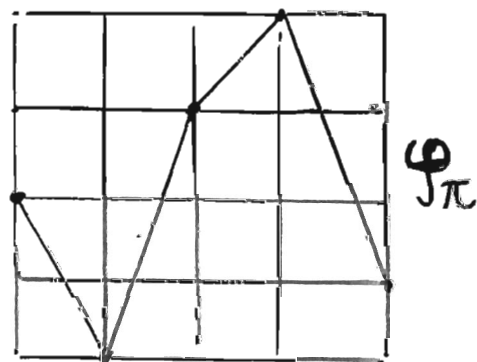
定理

$\{\pi' : \text{巡回置換} \mid \pi' \leq \pi\}$

$= \{\varphi_\pi \text{ の周期軌道の置換}\}$

○ 写像 φ_π は区分線形写像

例: $\pi = (13452)$ のとき



braid type の順序構造

定義 (Boyland) $\beta, \beta' : \text{braid type}$

$$\beta \geq \beta'$$

$\Leftrightarrow \beta$ 型不変集合をもつ任意の $f: D \rightarrow D$ は
また β' 型不変集合をもつ

定理 (Boyland, 1992)

「 $\beta \geq \beta'$ 」は順序となる。

$$\begin{cases} \textcircled{1} & \beta \geq \beta \\ \textcircled{2} & \beta \geq \beta', \beta \leq \beta' \Rightarrow \beta = \beta' \\ \textcircled{3} & \beta \geq \beta' \geq \beta'' \Rightarrow \beta \geq \beta'' \end{cases}$$

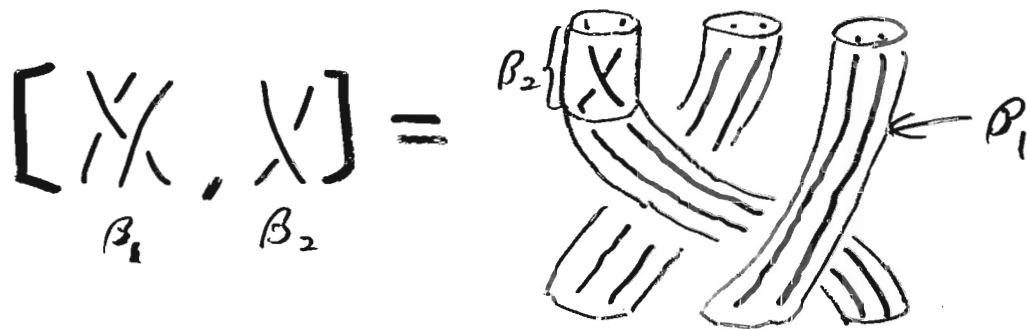
定理 $\beta : \text{PA型}$ のとき

$$\{\beta' \mid \beta' \leq \beta\} = \{bt(S) \mid S \text{ は } \mathcal{Y}_\beta \text{ の閉軌道}\}$$

\mathcal{Y}_β は β が定めた PA 写像

Forcing order に関する主な結果

$[\beta_1, \beta_2] := \beta_1$ の β_2 -extension



Frank-Misiurewicz '93

$$\gamma < [\beta_1, \beta_2] \Leftrightarrow \gamma < \beta_1 \quad \text{または} \\ \gamma = [\beta_1, \beta_3] \quad \exists \beta_3 < \beta_2$$

Handel '97 (M, '86)

$$\theta_3^m \sigma_1^{i_1} \sigma_2^{-j_1} \dots \sigma_1^{i_d} \sigma_2^{-j_d}$$

の開き

$\beta, \beta' : \text{PA 3-braid types}$

$\beta > \beta' \Leftrightarrow \beta'$ は β から次の操作で得られた

1. σ_1, σ_2^{-1} を除く
2. σ_1^2 を θ_3^{-1} に取りかえた
3. σ_2^{-2} を θ_3 に取りかえた

horse-shoe map が \mathbb{E} の braid types
の間 a forcing order

T. Hall, Carvalho (1994 ~)

E. Kiw

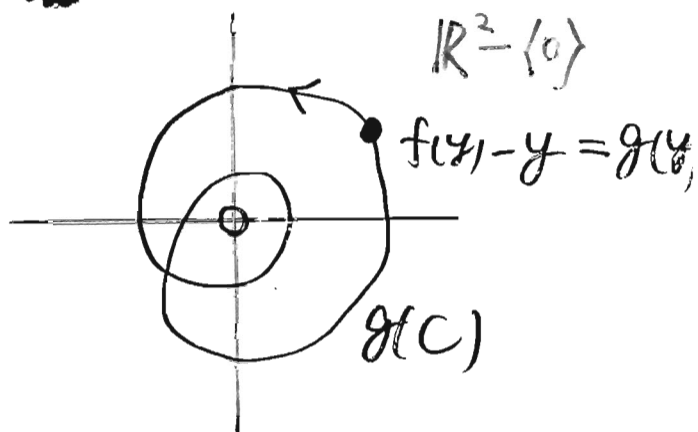
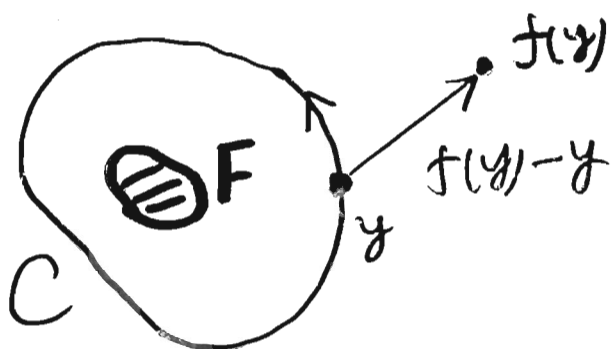
$B_{m,n}^{\mathbb{F}_2}$ の braid type

	1次元	2次元
周期軌道 の特徴	周期 (置換型)	組ひも型
順序	シャルコフスキー定理 (ととの精密化)	シャルコフスキー順序 の2次元版
$h(f) > 0$ の必+条件	奇素数も因数に もつ周期の存在	PA成分をもつ 組ひも型の存在
Simplest map	区分線形	PA写像
カスケード	周期倍分岐の カスケードが存在	無限個のタイプの 異なるカスケードが 存在
$h(f)$ の 評価	構造行列の スペクトル半径	Burau'行列の スペクトル半径 の最大値

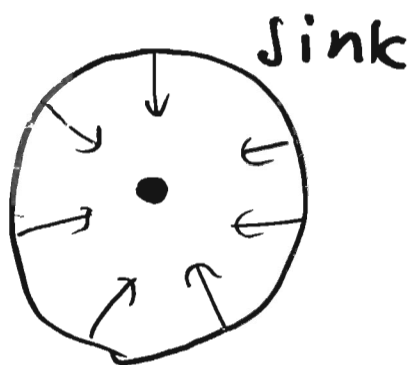
不動点指数

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

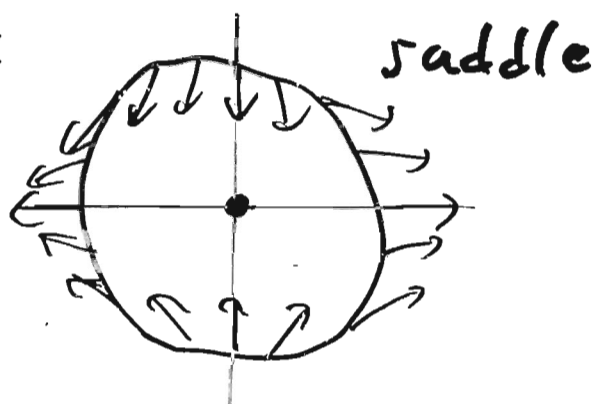
F : f の孤立不動点集合



不動点指数 $\text{ind}(F) := g(C)$ の回転数



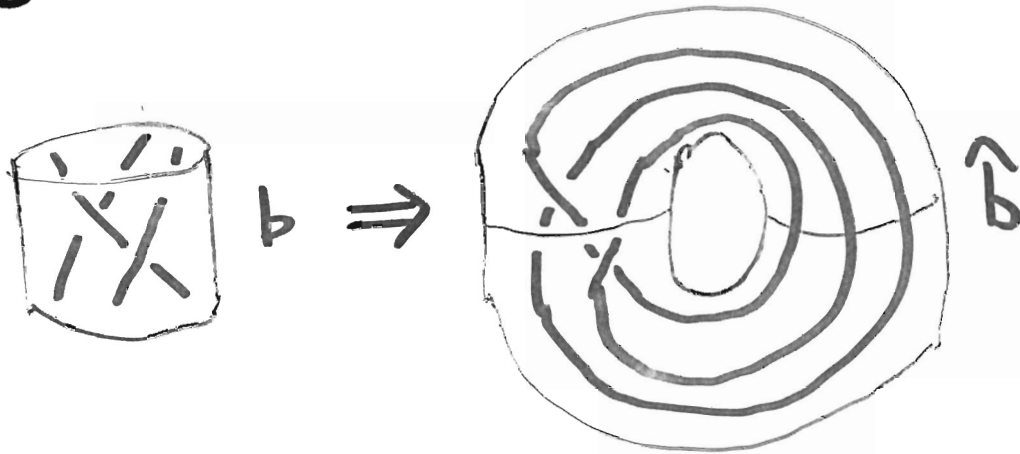
$$\text{ind} = 1$$



$$\text{ind} = -1$$

$$F = \{x_1, x_2, \dots, x_m\} \Rightarrow \text{ind}(F) = \sum_{i=1}^m \text{ind}(x_i)$$

$b \in B_n$ \hat{b} : closed braid

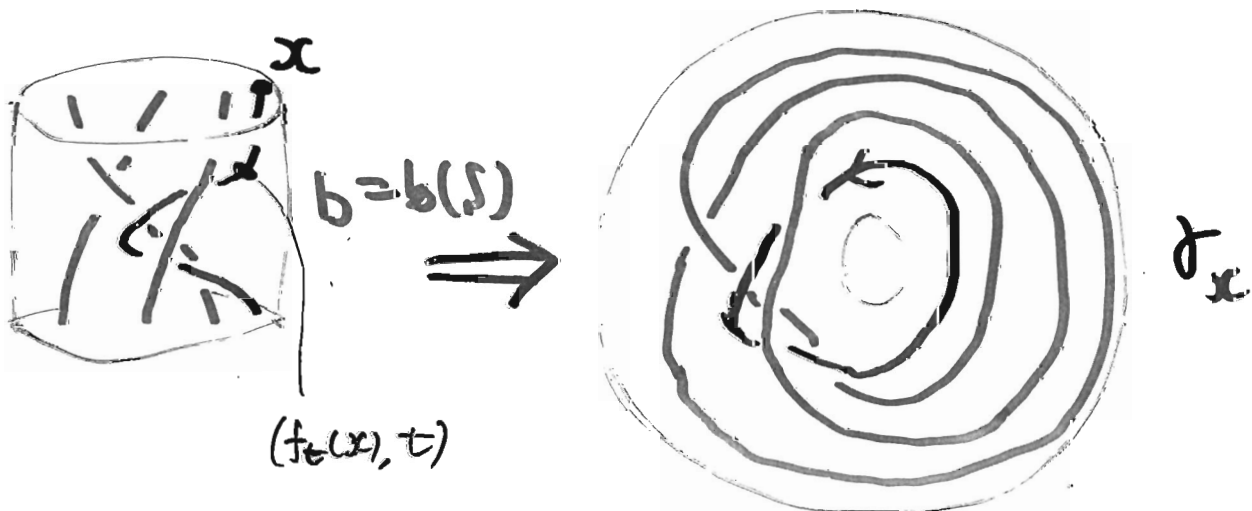


$$X_b := D \times S^1 - \hat{b}$$

$\text{Loop}(X_b) := \{X_b \text{ 内 } \alpha \text{ loop}\} / \text{homotopy}$

$f: D \rightarrow D$ $S = f$ -不變 f_t : isotopy

$$\begin{array}{ccc} \text{Fix}(f) - S & \longrightarrow & \text{Loop}(X_b) & (b = b(S)) \\ \downarrow \cong & & \downarrow \cong & \\ X & \longrightarrow & [X] & \end{array}$$



A : 集合

$$\mathbb{Z}A := \left\{ \sum_{a \in A} n_a \cdot a : \text{有限和} \mid n_a \in \mathbb{Z} \right\}$$

群になる

A が群のとき, $\mathbb{Z}A$ は環になる

定義 $f|_{D-f}$ の一般化 χ フレッシュ数

$$L(f|_{D-f}) := \sum_{x \in \text{Fix}(f|_{D-f})} \text{ind}(x) [\chi_x] \in \mathbb{Z} \text{Loop}(A, b)$$

これはホモトピー不変量である

$$\begin{array}{ccc} F_n & \xrightarrow{\Phi} & \text{Loop}(X_b) \\ \cong & & \cong \end{array}$$



$$\pi_1(D-S) = F_n$$

a_1, \dots, a_n が生成元

$b \in B_n$ は F_n に作用する

$$\sigma_i(a_j) = \begin{cases} a_{i+1} a_i^{-1} a_{i-1} & i=j \\ a_j & i \neq j \end{cases}$$



$$W, W' \in F_n$$

$$\alpha_W = \alpha_{W'} \Leftrightarrow W' = b(W) W \eta^{-1}, \exists \eta \in F_n$$

(ライティング-同値)

特例. $\alpha_{b(W)} = \alpha_W \quad (b(W) = b(W) W W^{-1})$

$$\alpha_{W_1 \cdot W_2} = \alpha_{b(W_2) \cdot W_1}$$

$$(b(W_2^{-1}) (b(W_2) W_1) (W_2^{-1})^{-1} = W_1 W_2)$$

$$d \in \mathbb{N} \quad 1 \leq p \leq d$$

$(p, p+1, \dots, d)$ は $\langle 1, 2, \dots, d \rangle$ の区間

$\Leftrightarrow d-p < d$ したがって cyclic に考えよう

区間の集まり $\{J_1, \dots, J_s\}$ は $\langle 1, \dots, d \rangle$ の分割

$$\Leftrightarrow \underbrace{J_1 \cup \dots \cup J_s}_{\text{disjoint}} = \langle 1, \dots, d \rangle$$

$$P_{m,d} = \{ \text{分割 } \{J_1, \dots, J_s\} \mid |J_k| \leq m \}$$

$$\text{例 } P_{2,3} = \left\{ \langle (1), (2), (3) \rangle, \langle (1,2), (3) \rangle, \langle (1), (2,3) \rangle, \right. \\ \left. \langle (1), (2), (3) \rangle \right\}$$

$m=2, d=3$

$$I = (i_1, \dots, i_d) \in \mathbb{N}^d$$

$$P = \frac{1 \dots 1}{1 \dots 1}$$

$$\rho = \sigma_1 \sigma_2 \dots \sigma_{n+1} \in B_n$$

$$\rho(I) = (\rho \sigma_1^{i_1}, \dots, \rho \sigma_1^{i_d})$$

$$1 \leq p \leq d \quad g_p = \rho(i_p, \dots, i_d)$$

$$J = (p, \dots, r) \in \mathbb{P}^d \quad |J| = J \cap \{1 \leq i \leq n-1\}$$

$$U(J) \cap \mathbb{Z}F_n = \begin{cases} (u_0 + \dots + u_{i_p-2}) a_2^{-i_p} a_{|J|+1}^{g_p} & |J| \leq n-2 \\ a_1^{g_p} a_{n+1}^{g_p} & |J| = n-1 \\ \sum_{\substack{2 \leq k \leq i_p \\ 0 \leq l \leq i_p-2 \\ (k,l) \neq (i_p,0)}} u_k^{g_p} u_l^{g_p} a_{n+1}^{g_p} & |J| = n-1 \\ & i_p = 1 \\ & i_p \geq 2 \end{cases}$$

∴ ∴ ∴.

$$u_j = \begin{cases} -a_2^{j/2} & j \text{ even} \\ a_1 a_2^{(j-1)/2} & j \text{ odd} \end{cases}$$

証明の方針

$$J(b) = \left(\frac{\partial b(a_j)}{\partial a_j} \right)_{1 \leq i, j \leq n-1} \quad \text{Fox 微分によるヤコビ行列}$$

$$L(f|_{\partial D}) = -\underline{\Phi}(\text{tr } J(b))$$

$J(b)$ を計算する

系 $I = (i_1, \dots, i_d)$ $i_1 \cdots i_d \geq 2$

$$f(I) = pA$$

$\Rightarrow \partial D$ 上 a periodic orbit は

$\frac{d}{n-2}$ 回転する

