修士論文

ウェーブレットの滑らかさと減衰度について

友枝恭子
奈良女子大学大学院 人間文化研究科 数学専攻

2007年

要旨

まず、ウェーブレットについて述べる．次に、ウェーブレットの滑らかさと減衰度について考察する．最後にデュバニスキーヘルナンデスによるウェーブレットに更なる減衰評価を与える．すなわち、彼らのウェーブレットの減衰評価を対数関数を用いて考察する．

謝辞

本論文を作成するにあたり、御多忙の中いつも暖かくご指導して下さった森藤紳哉先生をはじめ数学教室の皆様に深く感謝し、厚く御礼申し上げます．

目 次

§1 序文

この論文では、ウェーブレットの滑らかさと減衰度について考察する．ウェーブレットは、1980 年代に現れた非常に新しい分野でありフーリエ解析を補う手段として多くの研究がされている．ウェーブレットとは、$\psi(x) = \{2^{j/2}\psi(2^j x - k)\}_{j,k\in \boldsymbol{Z}}$ が $L^2(\boldsymbol{R})$ における正規直交基底をなすことである．このウェーブレットについて、1998 年にデュバニスキーヘルナンデスは彼らのウェーブレットに対して以下の減衰評価を与えた．

$$|\psi(x)| \leq C_\delta \exp(-|x|^{1/\delta}),\ \ \delta > 1.$$

本論文では、デュバニスキーヘルナンデスによる論文 [DH] に従い、更なる減衰評価を次の定理として与えそれを証明する (第 3 節、定理 3.1 参照).

主定理

以下の減衰評価を満たすデュバニスキーヘルナンデス ウェーブレット ψ が存在する : 任意の $p = 1, 2, 3 \ldots$ と任意の $\delta > 1$ に対して、$C_{p,\delta}$ が存在し

$$|\psi(x)| \leq C_{p,\delta} \exp\left\{-\frac{|x|}{(\log|x|)(\log_2|x|)\cdots(\log_{p-1}|x|)(\log_p|x|)^\delta}\right\}$$

が成り立つ．ここで、$|x|$ は十分大きい値とする．

ここで、本論文の構成を説明する．まず第 2 節においてウェーブレット解析について述べる．始めにフーリエ解析とウェーブレット解析の類似点と相違点について述べる．そして、Meyer のスケーリング関数とそれを使って構成された Meyer のウェーブレットについて述べる．次に、一般のウェーブレットを構成する方法である多重解像度解析について述べ、さらに Daubechies によって構成されたウェーブレットについて述べる．第 3 節では、デュバニスキーヘルナンデスのウェーブレットについて述べた後、超可微分関数、対数的ジュブレィ族、Paley-Wiener の定理について述べる. そして、デュバニスキーヘルナンデスのウェーブレットに更なる減衰評価を与えたものを主定理として与える．最後にその証明を与える．

§2　ウェーブレットについて

このセクションは、文献 [1], [2], [3] を基にしている.

§2.1　ウェーブレットについて

ウェーブレットとは、80 年代初めに現れた非常に新しい分野であり、フーリエ解析を補う手段として多くの研究がなされている. このセクションでは、ウェーブレットと窓フーリエ変換との類似点と相違点について述べる.

§2.1.1　窓フーリエ変換

さまざまな応用では信号 $f(t)$ が与えられたとき、$f(t)$ の局所的な周波数成分を表現する必要がある. 一般的な方法として、フーリエ変換

$$(\mathcal{F}f)(\omega) = \hat{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\boldsymbol{R}} f(t) e^{-i\omega t} dt$$

があるが、これでは、高い周波数をもつ爆発のような、時間的に局在化された情報を $\mathcal{F}f$ から読み取ることは困難である. よって、窓フーリエ変換を使う.

$$(T^{\mathrm{win}} f)(\omega, t) = \int_{\boldsymbol{R}} g(s-t) f(s) e^{-i\omega s} ds. \tag{2.1}$$

これは、信号 f を局在化した部分に分割し、そのフーリエ変換をとるという方法である. 信号解析では、これを離散化させたものを使う.

$$T^{\mathrm{win}}_{m,n}(f) = \int_{\boldsymbol{R}} g(s - nt_0) f(s) e^{-im\omega_0 s} ds. \tag{2.2}$$

ここで、ω_0, t_0 は固定された正の数である.

§2.1.2　ウェーブレット変換と窓フーリエ変換の類似点と相違点

窓フーリエ変換 (2.1)、(2.2) に対応するウェーブレット変換を定義する.

$$(T^{\mathrm{wav}} f)(a, b) = |a|^{-\frac{1}{2}} \int_{\boldsymbol{R}} f(t) \psi\left(\frac{t-b}{a}\right) dt, \tag{2.3}$$

$$T^{\mathrm{wav}}_{m,n}(f) = {a_0}^{-\frac{m}{2}} \int_{\boldsymbol{R}} f(t) \psi({a_0}^{-m} t - nb_0) dt. \tag{2.4}$$

ただし、$\displaystyle\int_{\boldsymbol{R}} \psi(t) dt = 0.$

まず、類似点について述べる.

- 共に (2.1) から (2.2)、(2.3) から (2.4) のような離散化が行える.
- (2.1) も (2.3) も L^2内積で書かれている.

次に相違点について述べると、解析を行う関数の形が次の意味で異なるということである. すなわち、窓フーリエ変換では $g^{\omega,t}(s) = e^{i\omega s}g(s-t)$ という関数を用いており、これは ω の値によらず同じ幅を持っているということが出来る. ウェーブレット変換では、$\psi^{a,b}(s) = |a|^{-1/2}\,\psi\left(\dfrac{s-b}{a}\right)$ という関数を用いており、これは、高い周波数 $(a \ll 1)$ では幅は非常に狭く、低い周波数 $(a \gg 1)$ では幅は非常に広い.

非常に短い時間で高周波数成分を含む現象を観察する場合は、「ズームアップ」して観察できるウェーブレットの方が優れているといえる.

§2.2 Meyer のウェーブレット

このセクションでは Meyer によって構成されたウェーブレットについて述べる.

§2.2.1 Meyer のスケーリング関数

Meyer のウェーブレットを構成するために、まず次のような Meyer のスケーリング関数 ϕ をそのフーリエ変換 $\hat{\phi}(\xi)$ を用いて定義する.

定義 2.1. $\hat{\phi}$ は $0 \leq \hat{\phi} \leq 1$ を満たす無限階連続微分可能な実数値の偶関数で、以下を満たす.

$$\hat{\phi}(\xi) = \begin{cases} 1 & \left(-\frac{2\pi}{3} \leq \xi \leq \frac{2\pi}{3}\right), \\ \\ 0 & \left(\xi \leq -\frac{4\pi}{3}\ ,\quad \xi \geq \frac{4\pi}{3}\right), \end{cases}$$

かつ

$$\hat{\phi}(\xi)^2 + \hat{\phi}(2\pi-\xi)^2 = 1 \qquad (0 \leq \xi \leq 2\pi).$$

Meyer のスケーリング関数 ϕ は、もし存在するならば、以下に列挙する性質を持つ.

- 対象軸は $x = 0$,
- 台は無限に広がっている,
- 遠方での減衰は非常に早いが、指数減少ほどではない,
- 積分値は 1,
- $\hat{\phi}(\xi)$ はコンパクト台を持つ.

§2.2.2 Meyer のウェーブレットの構成について

定義 2.1 を満たすスケーリング関数を以下のように作る. まず、関数 ϕ_0 は定義 2.1 での $\hat{\phi}(\xi)^2 + \hat{\phi}(2\pi - \xi)^2 = 1$ $(0 \leq \xi \leq 2\pi)$ 以外の条件を全て満たす関数とする. そして、$\phi(x)$ を次のように定義する.

$$\phi(x) = \mathcal{F}^{-1}\left[\frac{\hat{\phi}_0(\xi)}{\sqrt{\hat{\phi}_0(\xi)^2 + \hat{\phi}_0(2\pi - \xi)^2}}\right].$$

次に、$\hat{\phi}(2\xi)$ を周期 2π の周期関数に拡張したものを $m_0(\xi)$ とおく. Meyer のウェーブレット $\psi(x)$ は、次のセクションで述べる多重解像度解析を用いて構成されるが、ここでは以下のように、その構成方法だけを述べる. ただし $\psi(x)$ がウェーブレットであるとは、$\left\{2^{j/2}\psi(2^j x - k)\right\}_{j,k\in\boldsymbol{Z}}$ が $L^2(\boldsymbol{R})$ の正規直交基底をなすことである. 関数 ϕ が定義 2.1 を満たすとするとき、

$$\psi(x) = \mathcal{F}^{-1}\left[e^{-i\xi/2}\overline{m_0\left(\frac{\xi}{2} + \pi\right)}\hat{\phi}\left(\frac{\xi}{2}\right)\right]$$

はウェーブレットになる.

Meyer のウェーブレット $\psi(x)$ の性質を以下に列挙する.

- 台は無限に広がっている,
- 遠方での減衰は非常に早いが、指数減少ほど早くはない,
- 積分値は 0,
- フーリエ像 $\hat{\phi}(\xi)$ はコンパクト台を持つ.

Meyer のスケーリング関数からウェーブレットを構成したように、一般には多重解像度解析というものからウェーブレットを構成することが出来る.

§2.3 多重解像度解析について (MRA)

このセクションでは、多重解像度解析 (Multiresolution Analysis) について述べる. そして、ウェーブレットの構成方法を最後に述べる. まず、多重解像度解析の定義を与える. $L^2(\boldsymbol{R})$ を $\boldsymbol{R}$ 上二乗可積分全体の集合とする.

定義 2.2. 次の条件を満たす $L^2(\boldsymbol{R})$ の閉部分空間の増加列 $\{V_j\}_{j\in\boldsymbol{Z}}$ を多重

解像度解析と呼ぶ.

$$
\begin{array}{ll}
\text{(a)} & \cdots \subset V_{j-1} \subset V_j \subset V_{j+1} \subset \cdots, \\
\text{(b)} & \displaystyle\bigcap_{j\in\boldsymbol{Z}} V_j = \{0\}, \\
\text{(c)} & \overline{\displaystyle\bigcup_{j\in\boldsymbol{Z}} V_j} = L^2(\boldsymbol{R}), \\
\text{(d)} & f(x) \in V_j \Longleftrightarrow f(2x) \in V_{j+1}, \quad \forall j, \\
\text{(e)} & \text{ある } \phi(x) \in V_0 \text{が存在して、} \{\phi(x-k)\}_{k\in\boldsymbol{Z}} \text{は、} \\
 & V_0 \text{の正規直交基底となる.}
\end{array}
$$

条件 (e) に現れる ϕ をスケーリング関数と呼ぶ. $\phi_{j,k} = 2^{j/2}\phi\left(2^j x - k\right)$ とおくとき、$V_j := \overline{\mathrm{Span}}\{\phi_{j,k}\}_{k\in\boldsymbol{Z}}$ となる. ただし、$\overline{\mathrm{Span}}\{\phi_{j,k}\}_{k\in\boldsymbol{Z}}$ は、$\mathrm{Span}\{\phi_{j,k}\}_{k\in\boldsymbol{Z}} := \left\{\sum_{k\in\boldsymbol{Z}} a_k\phi_{j,k}; a_k \in \boldsymbol{C}\text{のうち有限個の } a_k\text{を除き } 0\right\}$ の $L^2(\boldsymbol{R})$ における閉包であるとする. 逆に、よい性質を持つ関数から多重解像度解析を次のように構成することが出来る.

定理 2.1. 関数 ϕ が無限遠で急減少であって、$\sum_{k\in\boldsymbol{Z}}\left|\hat{\phi}(\xi+2\pi k)\right|^2 = 1$ を満たすとする. $V_j := \overline{\mathrm{Span}}\{\phi_{j,k}\}_{k\in\boldsymbol{Z}}$ とおく. このとき、関数 ϕ が $\left|\hat{\phi}(0)\right| = 1$ を満たし、かつ無限階連続微分可能な周期関数 $m_0(\xi)$ があって、$\hat{\phi}(2\xi) = m_0(\xi)\hat{\phi}(\xi)$ が成り立つならば、$\{V_j\}_{j\in\boldsymbol{Z}}$ は多重解像度解析となる.

証明. (d), (e) は ϕ の定義から明らか.
(a) が成り立つことと、$\hat{\phi}(2\xi) = m_0(\xi)\hat{\phi}(\xi)$ を満たすような滑らかな関数 $m_0(\xi)$ が存在することは同値であることを示す. (a) が成り立つならば、$V_{-1} \subset V_0$ より $\phi(x/2) \in V_{-1}$ は $\{\phi(x-k)\}_{k\in\boldsymbol{Z}}$ を用いて、

$$
\frac{1}{2}\phi\left(\frac{x}{2}\right) = \sum_{k\in\boldsymbol{Z}} h_k\phi(x-k), \tag{2.5}
$$

$$
\text{ここで、} h_k = \frac{1}{2}\int_{\boldsymbol{R}}\phi\left(\frac{x}{2}\right)\overline{\phi(x-k)}dx
$$

となる. (2.5) をフーリエ変換して $m_0(\xi) = \sum_{k\in\boldsymbol{Z}} h_k e^{-ik\xi}$ とおくと $\hat{\phi}(2\xi) = m_0(\xi)\hat{\phi}(\xi)$ となる. あとは、$m_0(\xi)$ が無限階連続微分可能であることを示せばよい. ϕ は無限遠で急減少なので任意の自然数 N に対してある定数 C_N が存在して、$|\phi(x)| \le C_N(1+|x|)^{-N}$ が成り立つ. 不等式

$$
\frac{1}{1+|x-y|} \le \frac{1+|x|}{1+|y|}
$$

で $y = k$ とおき、$1/(1+|x/2|) \le 2/(1+|x|)$ を使うと、

$$
|h_k| \le \frac{2^{N+1}C_N C_{N+2}}{(1+|k|)^N}\int\frac{1}{(1+|x|)^2}dx
$$

が成り立つ．すなわち、任意の整数 M に対して、ある正の数 C_M が存在し、$|h_k| \le C_M(1+|k|)^{-M}$ が成り立つ．これは、h_k が急減少であることを示している．よって、$m_0(\xi)$ は無限階連続微分可能な関数であることが分かる．

逆に、$\hat{\phi}(2\xi) = m_0(\xi)\hat{\phi}(\xi)$ を満たすような滑らかな関数 $m_0(\xi)$ が存在するならば、$2^{-1}\phi(x/2) = \sum_{k\in\boldsymbol{Z}} h_k\phi(x-k)$ が成り立つことになり、$k \in \boldsymbol{Z}$ に対して、$\phi_{-1,k} \in V_0$ となることが示せるので、(a) が成り立つ．

(b) が成り立つことを示す．$f \in L^2(\boldsymbol{R})$ に対して、$P_j f = \sum_{k\in\boldsymbol{Z}}(f,\phi_{j,k})\phi_{j,k}$ とおく．任意の $f \in L^2(\boldsymbol{R})$ に対し、$\lim_{j\to-\infty}\|P_j f - 0\| = 0$ が成り立つことを示せばよい．ここで $\|\cdot\|$ は L^2 ノルムを表す．まず f が階段関数のときを考える．

$$\chi_{[a,b]} = \begin{cases} 1\,,\ x \in [a,b], \\ 0\,,\ x \notin [a,b]. \end{cases}$$

パーシバルの等式とシュワルツの不等式より

$$\begin{aligned}
\|P_j\chi_{[a,b]}\|^2 &= \sum_{k\in\boldsymbol{Z}} \left|\left(\chi_{[a,b]},\phi_{j,k}\right)\right|^2 \\
&= 2^j\sum_{k\in\boldsymbol{Z}}\left|\int_a^b \overline{\phi(2^jx-k)}dx\right|^2 \\
&= 2^j\sum_{k\in\boldsymbol{Z}}\left|\int_{2^ja}^{2^jb} \overline{\phi(x-k)}dx\right|^2 \\
&\le (b-a)\sum_{k\in\boldsymbol{Z}}\int_{2^ja}^{2^jb}|\phi(x-k)|^2\,dx \\
&= (b-a)\int_{\boldsymbol{R}}\sum_{k\in\boldsymbol{Z}}\chi_{[2^ja+k,2^jb+k]}(x)\,|\phi(x)|^2\,dx
\end{aligned}$$

となる．

$j \to -\infty$ のとき、区間 $[2^ja+k, 2^jb+k]$ は交わりを持たなくなるので

$$\sum_{k\in\boldsymbol{Z}}\chi_{[2^ja+k,2^jb+k]}(x)\,|\phi(x)|^2\,dx \le |\phi(x)|^2 \in L^1(\boldsymbol{R})$$

となり、ルベーグの優収束定理より、$\lim_{j\to-\infty}\|P_j\chi_{[a,b]}\| = 0$ となる．

(c) が成り立つこここと、$|\hat{\phi}(0)| = 1$ が同値であることを示す．(c) が成り立つここと任意の $\hat{g} \in L^2(\boldsymbol{R})$ に対し、$\lim_{j\to+\infty}\|P_j\hat{g} - \hat{g}\| = 0$ であることとは同等である．ピタゴラスの定理の無限次元版より、$\|P_j\hat{g}-\hat{g}\|^2 = \|P_j\hat{g}\|^2 - \|\hat{g}\|^2$ が成り立つから、$|\hat{\phi}(0)| = 1$ が成り立つことと、任意の $\hat{g} \in L^2(\boldsymbol{R})$ に対し、$\lim_{j\to+\infty}\|P_j\hat{g}\| = |\hat{\phi}(0)|\|\hat{g}\|$ が成り立つこととは同値であることを示せばよい．これは、$\hat{f} \in C_0^\infty(\boldsymbol{R})$ (ここで、$C_0^\infty(\boldsymbol{R})$ はコンパクト台をもつ無限階連続微分可能な関数の集合) に対しては、$|\hat{\phi}| \le 1$ かつ $\hat{\phi}$ は原点で連続だから、

ルベーグの優収束定理より、$\lim_{j\to+\infty}\|P_j\hat{f}\|^2 = |\hat{\phi}(0)|^2\int\|\hat{f}\|^2 d\xi$, すなわち、$\lim_{j\to+\infty}\|P_j\hat{f}\| = |\hat{\phi}(0)|\|\hat{f}\|$ が成り立つことより明らかである．$\hat{g}\in L^2(\boldsymbol{R})$ に対しては、$C_0^\infty(\boldsymbol{R})$ が $L^2(\boldsymbol{R})$ で稠密であることから、任意の ϵ に対して、$\hat{f}\in C_0^\infty(\boldsymbol{R})$ が存在し、$\|\hat{g}-\hat{f}\| < \epsilon$ が成り立つ．射影作用素の性質より、$\|P_j\hat{g}-P_j\hat{f}\|\leq\|\hat{g}-\hat{f}\|<\epsilon$ となるので、(c) が成り立つ． □

そして最後に、Meyer のスケーリング関数からウェーブレットを構成したように、多重解像度解析からウェーブレットが構成できる．

定理 2.2. $\{V_j\}_{j\in\boldsymbol{Z}}$ は多重解像度解析とする．関数 $m_0(\xi)$ は、$\hat{\phi}(2\xi) = m_0(\xi)\hat{\phi}(\xi)$ を満たすとする．このとき、

$$\psi(x) = \mathcal{F}^{-1}\left[e^{-i\xi}\overline{m_0\left(\frac{\xi}{2}+\pi\right)}\hat{\phi}\left(\frac{\xi}{2}\right)\right] \tag{2.6}$$

はウェーブレットである．

§2.4 ウェーブレットの滑らかさについて

定義 2.3. r を非負の整数とする．

$$S_r(\boldsymbol{R}) = \left\{f(x)\in C^r(\boldsymbol{R}) \ : \left(\frac{d}{dx}\right)^\alpha f(x) \ \ (0\leq\alpha\leq r) \text{ は無限遠で急減少}\right\}$$

とする．$f(x)\in S_r(\boldsymbol{R})$ のとき、$f(x)$ は r 次正則であるという．多重解像度解析に現れるスケーリング関数 ϕ が r 次正則のとき、その多重解像度解析を r 次正則多重解像度解析と呼ぶ．

定理 2.3. $\{V_j\}_{j\in\boldsymbol{Z}}$ は r 次正則多重解像度解析であるとする．このとき、(2.6) で定義されるウェーブレットは r 次正則である．

Meyer のウェーブレットは無限次元正則であり、スケーリング関数も無限次元正則である．さらに Meyer のスケーリング関数 ϕ のフーリエ像 $\hat{\phi}$ はコンパクト台をもつ. Meyer のウェーブレットのフーリエ像 $\hat{\psi}(2\xi) = m_1(\xi)\hat{\psi}(\xi)$ ($m_1(\xi) = e^{-i\xi}\overline{m_0(\xi+\pi)}$) もコンパクト台をもつ．しかし、無限次元正則かつコンパクト台をもつウェーブレットは存在しない．ただし、任意の正の整数 r に対して r 次正則でコンパクト台をもつウェーブレットは構成出来る．これが、Daubechies のウェーブレットである．

§2.5 Daubechies のウェーブレット

応用上では、ウェーブレットの滑らかさよりも台の大きさの方が問題になる．よって、台の大きさに焦点を当てて Daubechies のコンパクト台を持つウェーブレットについて考える．

まず、リースの補題について、述べる．

リースの補題

z のローラン多項式 $A(z) := \sum_{|k|\le L} a_k z^{-k}$($L$ は非負の整数) があって、$z = e^{i\xi}$ (ξは実数) を代入したとき、$A(e^{i\xi}) \ge 0$ を満たすとする．このとき、あるローラン多項式 $H(z) := \sum_{0\le k\le L} h_k z^{-k}$ があって、$A(e^{i\xi}) = |H(e^{i\xi})|^2$ が成り立つ．$A(z)$ が実係数なら $H(z)$ も実係数にとれる．

$g(\xi)$ を以下を満たす三角多項式とする. リースの補題より、$g(\xi) = |m_0(\xi)|^2$ を満たす三角多項式 $m_0(\xi)$ が得られる．

定義 2.4. 関数 $g(\xi)$ を次のような 5 つの条件を満たす三角多項式とする．

$$\begin{cases} g(\xi) = \sum_{|k|\le L} \gamma_k e^{-ik\xi} \ge 0 \qquad (L \text{ は非負の整数}), \\ g(\xi) + g(\xi+\pi) = 1, \\ g(0) = 1, \\ g(\xi) > 0, \quad \xi \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right], \\ \prod_{j=1}^{+\infty} g(2^{-j}\xi) \le C(1+|\xi|)^{-2s} \quad (s > r+1, \quad r \text{ は非負の整数}). \end{cases}$$

このとき、次の補題が成り立つ．

補題 2.1. 三角多項式 g は定義 2.4 を満たすとする. このとき、上記の三角多項式 m_0 は

$$\begin{cases} m_0(\xi) \text{ は無限階連続微分可能な周期関数である}, \\ |m_0(\xi)|^2 + |m_0(\xi+\pi)|^2 = 1, \\ m_0(0) = 1 \end{cases}$$

を満たし、関数 ϕ を

$$\hat{\phi}(\xi) = \prod_{j=1}^{+\infty} m_0(2^{-j}\xi)$$

で定義すれば、関数 ϕ はコンパクト台をもつ r 次正則スケーリング関数になる．三角多項式 g が実係数なら三角多項式 m_0 も実係数にとれる．

定義 2.4 を満たす関数 $g_D(\xi)$ を次のように定義する．

$$g_D(\xi) = 1 - \frac{I_k(\xi)}{I_k(\pi)} \qquad \left(I_k(\xi) = \int_0^{\xi} (\sin t)^{2k+1} dt\right). \tag{2.7}$$

この $g_D(\xi)$ を用いると、以下の定理が得られる．

定理 2.4. 任意の非負の整数 r に対して、r 次正則でコンパクト台を持つウェーブレットが $g_D(\xi)$ を用いて構成できる. これを、Daubechies のウェーブレットと呼ぶ.

最後に注意として次のことを述べておく. Daubechies のウェーブレットは、コンパクト台の大きさ N が大きくなればなるほどヘルダー連続性 $r(N)$ も大きくなり、またそれらの間の漸近的な関係も知られている.

§3 デュバニスキーヘルナンデス ウェーブレットの更なる減衰評価

このセクションは我々の論文 [MT] を基にしている.

§3.1 序文

この論文での目的は、デュバニスキーヘルナンデス ウェーブレット (これは band-limited であり、subexponential decay をもつウェーブレットである) に更なる減衰評価を与えることである. 彼らのウェーブレット ψ は $|\psi(x)| \le C_\delta \exp(-|x|^{1/\delta})$, $\delta > 1$ を満たす. [DH] 参照. 適当な bell 関数を構成することによって、彼らのウェーブレットのうちのあるものは、例えば $|\psi(x)| \le C_\delta \exp\{-|x|/(\log|x|)^\delta\}$, $\delta > 1$, ($|x|$: 十分大) を満たす.

彼らのウェーブレット ψ はフーリエ変換 $\hat{\psi}(\xi) = e^{i\xi/2} b_a(\xi)$ と置くことによって構成される. $b_a(\xi)$, $0 < a \le \pi/3$ は、$\boldsymbol{R}$ 上偶関数であり、$[0,\infty)$ に制限すると $[\pi, 2\pi]$ 上の bell 関数になる. [AWW], [BSW], [HW] 参照. 関数 b_a はあらゆるジュブレィ族 Γ^δ, $\delta > 1$ に属する cutoff 関数 ϕ_a を用いて定義される.

本論文の構成を説明する. セクション 2 では、(M_n) 族, $\{M_n\}$ 族の超可微分関数 f の空間を定義することから始める. [Ko], [Bj], [Ro] 参照. ある特別な正の数列 $L_n (n = 0, 1, 2, \ldots)$ を与えた後、$p-$ 対数的ジュブレィ族 $\gamma^{p,\delta}$, $\Gamma^{p,\delta}$, $p = 1, 2, 3, \ldots$, $\delta > 1$ を定義し、超可微分関数に対する Paley-Wiener の定理を復習する. セクション 3 では、主定理を与える. セクション 4 では、その証明を行う. そこでは [DH] での Proposition 2. 6 の自然な拡張と、[Ma] の技巧を使った数列 L_n に付随する関数の計算を行う.

§3.2 記号、定義と結果

このセクションは、上に述べたように 3 つのサブセクションに分かれる.

§3.2.1 超可微分関数

$\boldsymbol{R}$ を 1 次元ユークリッド空間とする. M_n, $n = 0, 1, 2, \ldots,$ を正の数の数列とする. ただし、M_n は以下を満たすとする.

$$M_n{}^2 \le M_{n-1} M_{n+1}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots \;; \tag{3.1}$$

$$M_{n+1} \le A H^n M_n, \quad n = 1, 2, 3, \ldots \;; \tag{3.2}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{M_{n-1}}{M_n} < \infty, \tag{3.3}$$

ここで、A と H は n と独立な定数である. ジュブレィ数列 $n^{n\delta}$, $\delta > 1$ は上の全ての条件を満たす.

関数 $M(\rho)$ を

$$M(\rho) = \sup_{n\geq 0} \log \frac{\rho^n M_0}{M_n}, \quad \rho > 0 \ , \tag{3.4}$$

によって定義する. ここで、関数 $M(\rho)$ を数列 M_n に付随する関数と呼ぶ. $M_n = n^{n\delta}$ ならば、$M(\rho)$ は $\rho^{1/\delta}$ と同等である: $\lim_{\rho\to\infty} M(\rho)/\rho^{1/\delta} = \delta/e$.

$\boldsymbol{R}$ の開集合 Ω 上で、無限階連続微分可能な関数 f が次の定義を満たすとき、この f は (M_n) 族 (または、$\{M_n\}$ 族) の超可微分関数と言われる: 任意のコンパクト集合 $K \subset \Omega$ と任意の $h > 0$ に対して、ある定数 C(または、ある定数 h と C) が存在し、次の評価式が成立する.

$$\sup_{x\in K} \left| \left(\frac{d}{dx}\right)^n f(x) \right| \leq C h^n M_n, \quad n = 0, 1, 2, \dots \ . \tag{3.5}$$

Ω 上 (M_n) 族 (または $\{M_n\}$ 族) の全ての関数全体の空間を $\mathcal{E}^{(M_n)}(\Omega)$ (または $\mathcal{E}^{\{M_n\}}(\Omega)$) と表記する. K を $\boldsymbol{R}$ のコンパクト集合であるとする. このとき、K にサポートが含まれる全ての (M_n) 族 (または $\{M_n\}$ 族) の関数全体の空間を $\mathcal{D}_K{}^{(M_n)}$ (または $\mathcal{D}_K{}^{\{M_n\}}$) とする. それらの空間に、自然な局所凸位相を導入することが出来る.

§3.2.2 対数的ジュブレイ族

以下に数列 L_n, $n = 0, 1, 2, \dots,$ を条件 (3.1), (3.2), (3.3) を満たすように与えよう. $\log_0 \sigma = \sigma$ かつ $\log_p \sigma = \log(\log_{p-1} \sigma)$, $p = 1, 2, 3, \dots$(ただし、$\log_{p-1} \sigma > 0$) とおく. このとき、十分大きな x に対して $p-$ 対数的関数 $l_{p,\delta}(x)$ を次のように定義する:

$$l_{p,\delta}(x) = (\log x)(\log_2 x) \cdots (\log_{p-1} x)(\log_p x)^\delta, \quad p = 1, 2, 3, \dots, \ \delta > 1.$$

数列 $L_n = (n l_{p,\delta}(n))^n$ は十分大きな n に対して (3.1), (3.2), (3.3) を満たす. 関数 $x \log_k x$, $k \geq 1$, は十分大きな x に対して凸であることだけ注意しておこう. 十分大きな ρ に対して、数列 L_n に付随する関数は (3.6) のように書くことができる.

$$L(\rho) = \sup_{n\geq n_0} [n \log \rho - n(\log n + \log_2 n + \cdots + \log_p n + \delta \log_{p+1} n)]. \tag{3.6}$$

ここで、n_0 は十分大きな値とする. 最後に、以下のように $p-$ 対数的ジュブレイ族を定義する.

定義 3.1. $p = 1, 2, 3, \ldots,\ \delta > 1$ かつ $L_n = (nl_{p,\delta}(n))^n$ とする. このとき、

$$\gamma^{p,\delta} = \mathcal{E}^{(L_n)}(\boldsymbol{R})\ , \qquad \Gamma^{p,\delta} = \mathcal{E}^{\{L_n\}}(\boldsymbol{R})\ .$$

$\gamma^{p,\delta}$ と $\Gamma^{p,\delta}$ それぞれは、$p > q$ または $p = q,\ \delta \leq \epsilon$ のときかつそのときに限って連続的に $\gamma^{q,\epsilon}$ と $\Gamma^{q,\epsilon}$ に埋め込まれることに注意しておこう. さらに、$\Gamma^{p,\delta}$ は、$p > q$ または $p = q,\ \delta \leq \epsilon$ のときかつそのときに限って連続的に $\gamma^{q,\epsilon}$ に埋め込まれる. [Ko] の P.52〜P.53 参照. これは、[DH] の Lemma 2. 4 を一般化したものである.

§3.2.3 Paley-Wiener の定理

超可微分関数の一番基本的な結果は、次の Paley-Wiener の定理である:
M_n は条件 (3.1), (3.2), (3.3) を満たし、K は $\boldsymbol{R}$ のコンパクト集合であるとする. $\boldsymbol{C}$ 上の整関数 $u(\zeta)$ が、超可微分関数 $\phi(x) \in \mathcal{D}_K^{(M_n)}(\subset \mathcal{D}_K^{\{M_n\}})$ のフーリエーラプラス変換 $u(x) = \int_{\boldsymbol{R}} \phi(x) e^{-i\zeta x} dx$ であるための必要十分条件は、任意の $h > 0$ に対してある定数 C(ある定数 h と C) が存在して、

$$|u(\zeta)| \leq C \exp\left\{-M\left(\frac{|\zeta|}{h}\right) + H_K(\zeta)\right\}, \quad \zeta \in \boldsymbol{C},$$

が成り立つことである. ここで、$H_K(\zeta) = \sup_{x \in K} \mathrm{Im}(x\zeta)$ は、K のサポート関数である.

§3.3 主定理

主定理を以下に記す.

定理 3.1. 以下の減衰評価を満たすデュバニスキーヘルナンデス ウェーブレット ψ が存在する : 任意の $p = 1, 2, 3 \ldots$ と任意の $\delta > 1$ に対して、$C_{p,\delta}$ が存在し

$$|\psi(x)| \leq C_{p,\delta} \exp\left\{-\frac{|x|}{l_{p,\delta}(|x|)}\right\}, \quad |x| : \text{十分大}$$

が成り立つ.

§3.4 主定理の証明

証明の前に、Denjoy-Carleman-Mandelbrojt の定理について述べておく:
数列 M_n が条件 (3.1), (3.2), (3.3) を満たすとき、任意のコンパクト集合 K に対してある関数 $\phi \in \mathcal{D}_k^{(M_n)}(\subset \mathcal{D}_k^{\{M_n\}})$ が存在し、ϕ は $\phi(x) \geq 0$ と $\int_{\boldsymbol{R}} \phi(x) dx = 1$ を満たす.
[DH] の Proposition 2. 6 の自然な拡張を以下に述べる.

補題 3.1. すべての $\Gamma^{p,\delta}$, $p = 1, 2, 3, \ldots$, $\delta > 1$ に属する cutoff 関数が存在する.

証明. [DH] の Proposition 2. 6 の証明におけるレギュラリゼーションの手続きを用いる. パラメータ p $(= 1, 2, 3, \ldots)$ も考慮に入れなければならない. h は無限階連続微分可能な非負関数で区間 $[-1,\ 1]$ にコンパクトな台を持つとする. さらに、$h(-x) = h(x)$, $x \in \boldsymbol{R}$ であり、$\int_{\boldsymbol{R}} h(x)dx = 1$ を満たすとする. N_m は十分大きい正の整数の増加列であって、

$$\sum_{n \geq N_m} (l_{m,\delta_m}(n))^{-1} < 2^{-m},$$

を満たすとする. ここで、$\delta_m = 1 + 1/m$ である. $N_m \leq n < N_{m+1}$ で $a_n = (l_{m,\delta_m}(n))^{-1}$ と選ぶことによって、$\sum_{n \geq N_1} a_n \leq \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-m} = 1$ が成り立つ. $\phi_{(n)}(x)$, $n \geq N_1$ を以下で定義する.

$$\phi_{(n)}(x) = h_{a_{N_1}} * h_{a_{N_1+1}} * \cdots * h_{a_n}(x).$$

ここで、$h_a(x)$ は $h_a(x) = (1/a)h(x/a)$ と定義する.したがって $\int_{\boldsymbol{R}} h_a(x)dx = 1$ となる. $\phi_{(n)}$ は区間 $[-1,\ 1]$ でコンパクトな台を持つことに注意する. さて、任意の $p = 1, 2, 3, \cdots$ と任意の $\delta > 1$ に対して、ある定数 $C_{p,\delta}$ が存在し、全ての $N = 0, 1, 2, \ldots$ と全ての $x \in \boldsymbol{R}$ で

$$\left| \left(\frac{d}{dx} \right)^N \phi_{(n)}(x) \right| \leq (C_{p,\delta})^{N+1} (N l_{p,\delta}(N))^N, \ \ \forall n \geq n(p, \delta, N) \tag{3.7}$$

を満たすことを証明する. まず、m と n は $m > p$, $\delta_m < \delta$ かつ $n > N_m + N$ となるような十分大きな値とすると、

$$\begin{aligned} \left(\frac{d}{dx} \right)^N \phi_{(n)}(x) &= h_{a_{N_1}} * h_{a_{N_1+1}} * \cdots * h_{a_{Nm}}(x) * \left(\frac{d}{dx} \right) h_{a_{Nm+1}} \\ &* \ \ \cdots * \left(\frac{d}{dx} \right) h_{a_{Nm+N}} * \cdots * h_{a_n}(x) \end{aligned}$$

となる. また、$n \geq N_m$ で

$$\begin{aligned} \int_{\boldsymbol{R}} \left| \left(\frac{d}{dx} \right) h_a(x) \right| dx &= \frac{1}{a_n} \int_{\boldsymbol{R}} \frac{1}{a_n} \left| \left(\frac{d}{dx} h \right) \left(\frac{x}{a_n} \right) \right| dx \\ &\leq \frac{C}{a_n} \leq C l_{m,\delta_m}(n). \end{aligned}$$

よって、$\int u * v = (\int u)(\int v)$ と Young の不等式 $\sup |u * v| \leq (\sup |u|)(\int |v|)$ を使えば、

$$\begin{aligned} \left| \left(\frac{d}{dx} \right)^N \phi_{(n)}(x) \right| &\leq \frac{1}{a_{N_1}} \left(\sup_{x \in \boldsymbol{R}} h(x) \right) C^N (l_{m,\delta_m}(N_m + N))^N \\ &\leq (C_{p,\delta})^{N+1} (l_{p,\delta}(N))^N \end{aligned}$$

が成り立つ. N_m は、p と δ の両方に依存することに注意しておく. $\phi_{(n)}$ は、(3.7) と同じ評価式を満たす関数 ϕ に収束することが容易に分かる. $\square$

サブセクション 3.2.3 で述べた、Paley-Wiener の定理を使って、サブセクション 3.2.2 の (3.6) の $L(\rho)$ を評価する必要がある．$\sigma = \log \rho$ とする. このとき

$$L(\rho) = B(\sigma) = \sup_{n \geq n_0} [n\sigma - n(\log n + \log_2 n + \cdots + \log_p n + \delta \log_{p+1} n)]$$

と書ける．今、

$$B_1(\sigma) = \frac{e^{\sigma - 1}}{\sigma(\log \sigma) \cdots (\log_{p-2} \sigma)(\log_{p-1} \sigma)^{\delta}}$$

とする.

補題 3.2.

$$B(\sigma) \sim B_1(\sigma) \ \ (\sigma \to \infty) \quad \text{つまり、} \lim_{\sigma \to \infty} \frac{B(\sigma)}{B_1(\sigma)} = 1.$$

証明. [Ma] の p.122〜p.123 ($\delta = 1$ の場合) と同じ方法を用いる．$\alpha_n = \log M_n - \log M_{n-1},\ n = 1, 2, 3 \ldots$ とおくと、

$$\alpha_n = (1 + \log n) + \log_2 n + \cdots + \log_p n + \delta \log_{p+1} n + o(1),\ n \to \infty.$$

そして、α_n は $n \geq n_0$ で増加する．$N(\alpha)$ を数列 α_n の分布関数とする．つまり、$N(\alpha)$ は集合 $\{n; \alpha_n < \alpha\}$ の個数と等しい. $m = N(\alpha)$ とおく. このとき、

$$\begin{aligned}
&(1 + \log m) + \log_2 m + \cdots + \log_p m + \delta \log_{p+1} m + o(1) < \alpha \\
&\leq (1 + \log(m+1)) + \log_2(m+1) + \cdots + \log_p(m+1) + \delta \log_{p+1}(m+1) + o(1)
\end{aligned}$$

となる. なぜなら、$k \geq 1$ ならば、$\log_k \alpha = \log_{k+1} m + o(1)$ であり、

$$\log N(\alpha) = (\alpha - 1) - \log \alpha - \cdots - \log_{p-1} \alpha - \ \delta\ \log_p \alpha + o(1).$$

ここで以下に記す [Ma] のレンマ 1.8 III を使う必要がある.

補助定理 3.1. ([Ma] の 1.8 III) ν_n と λ_n は正の増加列であり、無限に発散するとする.

$$N(x) = \begin{cases} 0, & 0 < x \leq \nu_1, \\ \lambda_n, & \nu_n < x \leq \nu_{n+1},\ n \geq 1, \end{cases}$$

そして、

$$\lambda_0 = 0, \quad N_n = \sum_{i=1}^{n} (\lambda_i - \lambda_{i-1}) \nu_i,$$

とおく．このとき、$\nu_m \leq x \leq \lambda_{m+1},\ m \geq 1,$ に対し、

$$\int_0^x N(t)dt = \max_{n \geq 1} (\lambda_n x - N_n) = \lambda_m x - N_m.$$

が成り立つ.

この補助定理で $\nu_n = \alpha_n$ と $\lambda_n = n$ とすることによって、以下が成り立つ.

$$B(\sigma) = \int_{\alpha_1}^{\sigma} N(\alpha)d\alpha = \int_{\alpha_1}^{\sigma}[1+o(1)]\frac{e^{\alpha-1}d\alpha}{\alpha(\log\alpha)\cdots(\log_{p-2}\alpha-1)(\log_{p-1}\alpha)^{\delta}}.$$

$B_1(\sigma)\sim B_1'(\sigma)$ を示すことは容易である. [Ha] の定理 19 から、$B(\sigma)\sim B_1(\sigma)$ が示せる. □

ここで補題 2 で $\sigma = \log\rho$ とおくと、

$$L(\rho)\sim\frac{\rho}{e(\log\rho)\cdots(\log_{p-2}\rho)(\log_{p-1}\rho)^{\delta}} \tag{3.8}$$

となる.

最後に [DH] のセクション 3 で与えられた議論に戻る. 補題 3. 1 によって、[DH] の p. 401 のように、全ての $\Gamma^{p,\delta},\ p=1,2,3,\cdots,\ \delta>1$ に属する cutoff 関数 ϕ_a を選ぶ. 関数 ϕ_a は区間 $[-a,\ a],\ 0<a\le\pi/3$ にコンパクトな台を持つ. $\theta_a(x)=\int_{-\infty}^{x}\phi_a(t)dt$ とする. これは、全ての $\Gamma^{p,\delta},\ p=1,2,3,\ldots,\ \delta>1$ に属する. このとき、[Ru] の数列 A_n は $(L_n/n!)^{1/n}$ と等しく、増加列であることから [Ru] の定理 A は $S_a(x)=\sin(\theta_a(x))$ と $C_a(x)=\cos(\theta_a(x))$ は全ての $\Gamma^{p,\delta},\ p=1,2,3,\ldots,\ \delta>1$ に属することを示している. 2 つの超可微分関数の合成はよく研究されている. [DH] の定理3. 3 も参照. [Ko] の定理2. 8によって、関数 $b_a(x)=S_a(x-\pi)C_{2a}(x-2\pi)$ は全ての $\Gamma^{p,\delta},\ p=1,2,3,\ldots,\ \delta>1$ に属する. サブセクション 3. 2. 2 より、関数 b_a は全ての $\gamma^{p,\delta},\ p=1,2,3,\ldots,\ \delta>1$ に属する. サブセクション 3. 2. 3 での Paley-Wiener の定理、評価式 (3.8)、そしてデュバニスキーヘルナンデス ウェーブレット ψ がセクション 1 で述べられている bell 関数に基づいて構成されていることを使うことにより、十分大きい値 $|x|$ に対して以下の評価を満たすことが分かる.

$$\begin{aligned}|\psi(x)| &= C\left|\hat{b_a}\left(x+\frac{1}{2}\right)\right| \le C_{p,\delta}\exp\left\{-L\left(e\left|x+\frac{1}{2}\right|\right)\right\}\\ &\le C_{p,\delta}\exp\left\{\frac{-|x|}{l_{p,\delta}(|x|)}\right\}.\end{aligned}$$

□

参考文献

第 2 節は以下を参考にした:

[1] 芦野隆一, 山本鎭男, ウェーブレット解析, 共立出版, 1997.

[2] I. ドブシー 著/ 山田道夫, 佐々木文夫 訳, ウェーブレット 10 講, シュプリンガー・フェアラーク東京, 2003.

[3] I. Daubechies, *Ten Lectures on Wavelets*, SIAM, 1992.

第 3 節は以下の論文に基づいている:

[MT] S. Moritoh and K. Tomoeda, *A Further Decay Estimate for the Dziubański-Hernández Wavelets.* submitted to Canad. Math. Bull.

論文 [MT] の参考文献は以下のとおり:

[AWW] P. Auscher, G. Weiss and M. V. Wickerhauser, *Local sine and cosine basis of Coifman and Meyer and the construction of smooth wavelets.* In Wavelets: A tutorial in theory and applications, (ed. C. K. Chui), Academic Press, (1992), 237-256.

[Bj] G. Björck, *Linear partial differential operators and generalized distributions.* Ark. Mat., **6** (1966), 351-407.

[BSW] A. Bonami, F. Soria and G. Weiss, *Band-limited wavelets.* J. Geom. Anal. **3** (1993), no. 6, 544-578.

[DH] J. Dziubański and E. Hernández, *Band-Limited wavelets with subexponential decay.* Canad. Math. Bull., **41** (1998), no. 4, 398-403.

[Ha] G. H. Hardy, *Orders of Infinity. The ' Infinitärcalcül' of Paul du Bois-Reymond.* Cambridge Univ. Press, Second edition, Reprinted, 1954.

[HW] E. Hernández and G. Weiss, *A first course on wavelets.* CRC Press., 1996.

[Ko] H. Komatsu, *Ultradistributions, I. Structure theorems and a char-*

acterization. J. Fac. Sci., Univ. Tokyo, Sect. IA **20** (1973), 25-105.

[Ma] S. Mandelbrojt, *Séries adherents, régularisation des suites, applications.* Gauthier-Villars, Paris, 1952.

[Ro] C. Roumieu, *Sur quelques extensions de la notion de distribution.* Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. Paris, 3 Sér, **77** (1960), 41-121.

[Ru] W. Rudin, *Division in algebras of infinitely differentiable functions.* J. Math. Mech. **11** (1962), no. 5, 797-809.