修士論文

$\Gamma_0(4)$ 上の保型形式について

奈良女子大学大学院
人間文化研究科 数学専攻
小野 愛子

２００７年1月３１日

序文

この論文で扱う保型形式とは，$\Gamma = SL_2(\mathbb{Z})$ の合同部分群と呼ばれる数論的部分群 Γ' に対し，上半平面 $\mathbb{H}$ 上の正則関数 f で次の 2 条件を満たすものをいう．

(1) $\gamma = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \Gamma'$ に対し，$f(\gamma z) = (cz+d)^k f(z)$ となる．

(2) f は Γ' の任意のカスプで有限である．

この論文の目的は合同部分群 $\Gamma_0(4) = \{\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \Gamma \mid c \equiv 0 \pmod{4}\}$ 上の保型形式の構造を調べ，それらをテータ級数 Θ^4 とウエイト 2 のアイゼンシュタイン級数 E_2 から構成される具体的な保型形式 F の多項式として表すことである．これはフルモジュラー群 Γ に関する保型形式がウエイト 4 と 6 のアイゼンシュタイン級数 E_4, E_6 で生成されることのアナロジーとなっている．保型形式の構造を調べるために，保型形式の対数微分 $f'(z)/f(z)$ を合同部分群 $\Gamma_0(4)$ に関する基本領域に沿って積分し，f の零点および極の情報を取り出して利用する（定理 4.2）．これはリーマン・ロッホの定理と呼ばれる一般定理の特殊な例となっている．

論文の構成について述べよう．まず第一章で $SL_2(\mathbb{Z})$ とその合同部分群の定義について述べる．次いで第二章では保型形式の定義と簡単な性質をあげる．第三章で第四章で重要な役割を果たす，アイゼンシュタイン級数とテータ関数という保型形式の具体例を解説する．最後の第四章で $\Gamma_0(4)$ 上の保型形式の構造をリーマン・ロッホの定理（定理 4.2）を用いて決定する．

謝辞

本論文作成にあたり，御多忙中にも関わらず，常に熱心に温かくご指導下さった上田勝教授に心から御礼申し上げます．また多大なる御助言と御教示をいただきここに修士論文が完成したことを，心より感謝いたします．

1　$SL_2(\mathbb{Z})$ とその合同部分群

まず，保型形式の定義で利用する $SL_2(\mathbb{Z})$ とその合同部分群について述べる．

定義 1.1. 可換環 R に対する一般線形群 $GL_2(R)$ を

$$GL_2(R) = \{\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \mid \det g \in R^*\}$$

と定める．（R^* は R の可逆元のなす乗法群である．）

定義 1.2. 特殊線形群 $SL_2(R)$ を

$$SL_2(R) = \{\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in GL_2(R) \mid \det g = 1\}$$

と定める．

定義 1.3. 実数体 $\mathbb{R}$ 上で考える．元 $g = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in SL_2(\mathbb{R})$ と点 $z \in \mathbb{C}$ が与えられたとき，

$$gz = \frac{az+b}{cz+d} \quad ; \quad g\infty = \frac{a}{c} = \lim_{z\to\infty} gz$$

と定め，この写像 $z \mapsto gz$ をリーマン球面の一次分数変換と呼ぶ.

定義 1.4. $SL_2(\mathbb{R})$ の中の整数成分を持つ行列からなる部分群は $SL_2(\mathbb{Z})$ であり，$SL_2(\mathbb{Z})$ はフルモジュラー群と呼ばれ，しばしば Γ で表される．

定義 1.5. N を正の整数とする．

$$\Gamma(N) = \{\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in SL_2(\mathbb{Z}) \mid a \equiv d \equiv 1 \pmod N,\ b \equiv c \equiv 0 \pmod N)\}$$

と定める．これは $SL_2(\mathbb{Z})$ の正規部分群である．$\Gamma(N)$ はレベル N の主合同部分群と呼ばれる．

Γ の部分群はそれがある N に対する $\Gamma(N)$ を含むとき，レベル N の合同部分群と呼ばれる．レベル N の合同部分群は N の任意の倍数 N' に対しレベル N' の合同部分群でもある．Γ の部分群はそれがレベル N の合同部分群となるような N がとれるとき，合同部分群という．

特に重要な Γ の合同部分群として

$$\Gamma_0(N) = \{\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \Gamma \mid c \equiv 0 \pmod N)\}$$

を考えていく．

次の命題は有名であり，また有用である．

命題 1.1.

(1) フルモジュラー群 $\Gamma = SL_2(\mathbb{Z})$ は 2 つの行列 $T = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ と $S = \left(\begin{smallmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ によって生成される.

(2) 合同部分群 $\Gamma_0(4)$ は 3 つの行列 $T = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 1 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right)$ によって生成される.

[証明]

(1) 参考文献 [1] §3.1 命題 3.4 参照 □

(2) 参考文献 [1] §3.1 演習問題 13(d) 及びその解答参照 □

定義 1.6. $k \in \mathbb{Z}$ とする. 上半平面 $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} z > 0\}$ 上の関数 $f : \mathbb{H} \longrightarrow \mathbb{C}$ と $\gamma = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \Gamma$ に対して,

$$f(z)\big|[\gamma]_k = (cz+d)^{-k} f\left(\frac{az+b}{cz+d}\right), z \in \mathbb{H}$$

とおく. すると $\gamma_1 = \left(\begin{smallmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{smallmatrix}\right), \gamma_2 = \left(\begin{smallmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{smallmatrix}\right) \in \Gamma$ に対して,

$$f(z)\big|[\gamma_1]_k\big|[\gamma_2]_k = f(z)\big|[\gamma_1\gamma_2]_k$$

が計算で確かめられ, $\mathbb{H}$ 上の関数への Γ の作用が定まる. 実際

$$\begin{aligned}
\big\{f(z)\big|[\gamma_1]_k\big\}\big|[\gamma_2]_k &= (c_2z+d_2)^{-k} f(\gamma_2 z)\big|[\gamma_1]_k \\
&= (c_2z+d_2)^{-k}(c_1\gamma_2 z+d_1)^{-k} f(\gamma_1\gamma_2 z) \\
&= \left\{(c_2z+d_2)\left(c_1\frac{a_2z+b_2}{c_2z+d_2}+d_1\right)\right\}^{-k} f(\gamma_1\gamma_2 z) \\
&= \{c_1(a_2z+b_2)+d_1(c_2z+d_2)\}^{-k} f(\gamma_1\gamma_2 z) \\
&= \{c_1a_2+d_1c_2)z+(c_1b_2+d_1d_2)\}^{-k} f(\gamma_1\gamma_2 z) \\
&= f(z)\big|[\gamma_1\gamma_2]_k
\end{aligned}$$

例として $f(z)\big|[T]_k$ と $f(z)\big|[S]_k$ を具体的にかいてみる.

$$\begin{aligned}
f(z)\big|[T]_k &= (0\cdot z+1)^{-k} f\left(\frac{1\cdot z+1}{0\cdot z+1}\right) = f(z+1)\,. \\
f(z)\big|[S]_k &= (1\cdot z+0)^{-k} f\left(\frac{0\cdot z-1}{1\cdot z+0}\right) = z^{-k} f\left(-\frac{1}{z}\right)\,.
\end{aligned}$$

2 保型形式の定義と簡単な性質

この節では，保型形式等の定義と簡単な性質を述べる．

定義 2.1. $f(z)$ を上半平面 $\mathbb{H}$ 上の有理型関数．$\Gamma' \subset \Gamma$ をレベル N の合同部分群，すなわち $\Gamma' \supset \Gamma(N)$ となるものであるとする．また $k \in \mathbb{Z}$ とする．

$f(z)$ がすべての $\gamma \in \Gamma'$ に対して，

$$f\big|[\gamma]_k = f$$

となり，かつ任意の $\gamma_0 \in \Gamma = SL_2(\mathbb{Z})$ に対し $f\big|[\gamma_0]_k$ が，

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n q_N^n \qquad (q_N = e^{2\pi i z/N})$$

の形の展開を持ち， $n \ll 0$ に対して $a_n = 0$ となるならば，$f(z)$ は Γ' に関するウェイト k の **保型関数** と呼ばれる．

もし加えて保形関数 $f(z)$ が $\mathbb{H}$ 上で正則関数であり，かつすべての $\gamma_0 \in \Gamma$ に対する展開で $n < 0$ について $a_n = 0$ であるときには，$f(z)$ は Γ' に関するウェイト k の **保型形式** と呼ばれる．その様な $f(z)$ の集合は $M_k(\Gamma')$ で表される．

さらに，保型形式がすべての $\gamma_0 \in \Gamma$ に対する展開で $a_0 = 0$ であるときには，$f(z)$ は Γ' に関するウェイト k の **カスプ形式** と呼ばれる．その様な $f(z)$ の集合は $S_k(\Gamma')$ で表される．

保形関数は有限位数の極のみ持ち，保型形式はカスプを含むすべての点で正則である．そして，カスプ形式ではすべてのカスプで零の値をとる．

命題 2.1. Γ' に関するウエイト k の保型形式の集合を $M_k(\Gamma')$ ，Γ' に関するウエイト k のカスプ形式の集合を $S_k(\Gamma')$ で表す．このとき，

(1) $M_k(\Gamma')$ と $S_k(\Gamma')$ は共に $\mathbb{C}$ 上のベクトル空間である．
(2) $f \in M_{k_1}(\Gamma')$ かつ $g \in M_{k_2}(\Gamma')$ であれば $fg \in M_{k_1+k_2}(\Gamma')$ である．
(3) Γ' に関するウェイト 0 の保型関数のなすベクトル空間は体になる．
(4) $-I \in \Gamma'$ であれば，奇数ウェイトの Γ' に関する零でない保型関数は存在しない．

[証明]
(1) $\gamma = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \Gamma'$ とする．保型形式に関する最初の条件は，

$$\begin{aligned}\alpha\big(f(z)\big|[\gamma]_k\big) &= \alpha(cz+d)^{-k} f(\gamma z) = (cz+d)^{-k}\alpha f(\gamma z) \\ &= (\alpha f)(z)\big|[\gamma]_k\end{aligned}$$

よりスカラー倍の下でも保たれ，また，

$$
\begin{aligned}
f_1(z)\big|[\gamma]_k + f_2(z)\big|[\gamma]_k &= (cz+d)^{-k} f_1(\gamma z) + (cz+d)^{-k} f_2(\gamma z) \\
&= (cz+d)^{-k}\{f_1(\gamma z) + f_2(\gamma z)\} = (cz+d)^{-k}(f_1+f_2)(\gamma z) \\
&= (f_1+f_2)(z)\big|[\gamma]_k
\end{aligned}
$$

より加法の下でも保たれる．二番目のカスプについての条件（カスプ条件）は明らかである．

(2) $f \in M_{k_1}(\Gamma')$ かつ $g \in M_{k_2}(\Gamma')$ のとき，

$$
\begin{aligned}
f(z)g(z) = (fg)(z)\big|[\gamma]_{k_1+k_2} &= (cz+d)^{-(k_1+k_2)}(fg)(\gamma z) \\
&= (cz+d)^{-k_1} f(\gamma z)(cz+d)^{-k_2} f(\gamma z) = \big(f(z)\big|[\gamma]_{k_1}\big)\big(g(z)\big|[\gamma]_{k_2}\big)\,.
\end{aligned}
$$

よって $fg \in M_{k_1+k_2}(\Gamma')$ である．

(3) 逆元についてのみ確かめる．f を零でないウェイト 0 の保型関数とすると，(2) の証明と同様にして，$1/f$ もウエイト 0 の保型関数となることがわかる．

(4) k を奇数とする．このとき $-I \in \Gamma'$ なので，$f \neq 0$ であれば保型関数の条件より，

$$
f(z) = f(z)\big|[-I]_k = f(z)\big|[\left(\begin{smallmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 0 \end{smallmatrix}\right)]_k = (-1)^k f(z) = -f(z)
$$

となって矛盾が生じる．よって零でない保型関数は存在しない．

[証明終わり]

3 保型形式の例

保型形式の具体例としてアイゼンシュタイン級数とテータ関数を紹介する．これらは第 4 章で主役を演じることとなる．

定義 3.1.（アイゼンシュタイン級数）
2 より大きい偶数 k と $z \in \mathbb{H}$ に対し，

$$G_k(z) = {\sum_{m,n\in\mathbb{Z}}}' \frac{1}{(mz+n)^k}, \qquad (m,n) \neq (0,0) \tag{1}$$

と定める．

命題 3.1. 記号を上の通りとすると

$$G_k \in M_k(\Gamma)$$

が成立する．

[証明]k は 4 以上なので二重級数 (1) は $\mathbb{H}$ の任意のコンパクト集合で一様に絶対収束する．したがって $G_k(z)$ は $\mathbb{H}$ 上の正則関数である．また $G_k(z+1)$ を計算すると，

$$\begin{aligned} G_k(z+1) &= {\sum_{m,n}}' \frac{1}{\{m(z+1)+n\}^k} = {\sum_{m,n}}' \frac{1}{(mz+m+n)^k} \\ &= {\sum_{m,n}}' \frac{1}{(mz+n')^k} = G_k(z) \end{aligned}$$

ここで $n' = m+n$ であり，(m,n) が $\mathbb{Z}^2 - \{(0,0)\}$ を動くとき $(m,n') = (m,m+n)$ も $\mathbb{Z}^2 - \{(0,0)\}$ を動くことを用いた．よって $G_k(z) = G_k(z+1)$．また，(m,n) が $\mathbb{Z}^2 - \{(0,0)\}$ を動くとき $(n,-m)$ も $\mathbb{Z}^2 - \{(0,0)\}$ を動くことに注意すると，

$$G_k\big|[S] = z^{-k} G_k\left(-\frac{1}{z}\right) = {\sum_{m,n}}' (-m+nz)^{-k} = G_k(z)$$

も満たす．命題 1.1(1) より，行列 $T = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ と $S = \left(\begin{smallmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ によって $\Gamma = SL_2(\mathbb{Z})$ が生成されるので，

$$G_k(z)\big|[\gamma]_k = G_k(z)\ , \gamma \in \Gamma$$

が証明できた．

次に，$G_k(z)$ のフーリエ展開については次の命題が成立する．その命題より，$G_k(z) \in M_k(\Gamma)$ であることがわかる．

[証明終わり]

命題 3.2. k を 2 より大きい偶数とし，$z \in \mathbb{H}$ とする．このとき上で定義された（保型形式）$G_k(z)$ は q 展開

$$G_k(z) = 2\zeta(k)\left\{1 - \frac{2k}{B_k}\sum_{n-1}^{\infty}\sigma_{k-1}(n)q^n\right\}$$

を持つ．ここで $q = e^{2\pi iz}$ であって $\zeta(k)$ はリーマンのゼータ関数

$$\zeta(k) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^k} \tag{2}$$

であり，また

$$\sigma_{k-1}(n) = \sum_{0<d|n} d^{k-1} \tag{3}$$

である．そしてベルヌーイ数 B_k は,

$$\frac{x}{e^x - 1} = \sum_{k=0}^{\infty} B_k \frac{x^k}{k!} \tag{4}$$

で定められるものである．

[証明]

三角関数 sin の積公式 $\sin(\pi a) = \pi a \Pi_{n=1}^{\infty}\left(1 - \frac{a^2}{n^2}\right)$ の対数微分をとると,

$$\pi\cot(\pi a) = \frac{1}{a} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2a}{a^2 - n^2}\right) = \frac{1}{a} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{a+n} + \frac{1}{a-n}\right)$$

を得る．左辺を,

$$\cos(\pi a) = \frac{1}{2}(e^{\pi ia} + e^{-\pi ia})\ , \qquad i\sin(\pi a) = \frac{1}{2}(e^{\pi ia} - e^{-\pi ia})$$

を用いて変形すると,

$$\begin{aligned}
\pi\cot(\pi a) &= \pi i\frac{\cos(\pi a)}{i\sin(\pi a)} = \pi i\frac{e^{\pi ia} + e^{-\pi ia}}{e^{\pi ia} - e^{-\pi ia}} \\
&= \pi i\frac{e^{2\pi ia} + 1}{e^{2\pi ia} - 1} = \pi i\frac{-e^{2\pi ia} + 1 + 2e^{2\pi ia}}{e^{2\pi ia} - 1} \\
&= \pi i\left(-1 + 2e^{2\pi ia}\frac{-1}{e^{2\pi ia} - 1}\right) = -\pi i - 2\pi i\sum_{n=1}^{\infty} e^{2\pi ian}\ .
\end{aligned}$$

よって,

$$-\pi i - 2\pi i\sum_{n=1}^{\infty} e^{2\pi ian} = \frac{1}{a} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{a+n} + \frac{1}{a-n}\right) \tag{5}$$

となる．(5) の両辺を a について $k-1$ 回微分すると

$$-(2\pi i)^k \sum_{n=1}^{\infty} n^{k-1} e^{2\pi i a n} = (-1)^{k-1}(k-1)!\Bigg[a^{-k} + \sum_{n=1}^{\infty}\Big\{(a+n)^{-k} + (a-n)^{-k}\Big\}\Bigg],$$

ここで k を偶数とし， $a = mz$ とおくと，

$$\frac{(2\pi i)^k}{(k-1)!} \sum_{n=1}^{\infty} n^{k-1} e^{2\pi i n m z} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(mz+n)^k}$$

となる．

後の補題 3.1 より，$\zeta(k) = -\frac{(2\pi i)^k}{2}\frac{B_k}{k!}$ （ k は正の偶数）であり，また $n = d,\ e^{2\pi i z} = q$ と書き直すと，

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(mz+n)^k} = \frac{(2\pi i)^k}{(k-1)!} \sum_{n=1}^{\infty} n^{k-1} e^{2\pi i n m z} = -\frac{2k}{B_k}\zeta(k) \sum_{d=1}^{\infty} d^{k-1} q^{dm}$$

となる．こうして，

$$G_k(z) = 2\zeta(k) + 2\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(mz+n)^k} = 2\zeta(k)\Bigg(1 - \frac{2k}{B_k}\sum_{m,d=1}^{\infty} d^{k-1} q^{dm}\Bigg)$$

を得る．

[証明終わり]

補題 3.1. k を 正の偶数とし， $\zeta(k) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^k}$ とするとき，

(6)
$$\zeta(k) = -\frac{(2\pi i)^k}{2}\frac{B_k}{k!}$$

となる．

[証明]

式 (5) の両辺を a 倍すると，

$$\begin{aligned} a\pi i\Bigg(1 + \frac{2}{e^{2\pi i a} - 1}\Bigg) &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2a^2}{a^2 - n^2} \\ &= 1 - 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\frac{a^2}{n^2}}{1 - \frac{a^2}{n^2}} \qquad (|a| < 1 \text{ として収束べき級数と考える}) \\ &= 1 - 2\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\Bigg(\frac{a^2}{n^2}\Bigg)^k = 1 - 2\sum_{k=1}^{\infty} \zeta(2k) a^{2k} \end{aligned}$$

また，ベルヌーイ数の定義 (4) より，

$$a\pi i\left(1+\frac{2}{e^{2\pi ia}-1}\right)=a\pi i+\frac{2\pi ia}{e^{2\pi ia}-1}=a\pi i+\sum_{k=0}^{\infty}\frac{B_k}{k!}(2\pi ia)^k\ .$$

テーラー展開の一意性より，

$$-2\zeta(2k)a^{2k}=\frac{B_2k}{2k!}(2\pi ia)^{2k}\ .$$

よって，

$$\zeta(2k)=-\frac{(2\pi i)^{2k}}{2}\frac{B_k}{2k!}$$

を得る．

[証明終わり]

定義 3.2. (**正規化されたアイゼンシュタイン級数**)

$$E_k(z)=\frac{1}{2\zeta(k)}G_k(z)=1-\frac{2k}{B_k}\sum_{n=1}^{\infty}\sigma_{k-1}(n)q^n \tag{7}$$

と定める．

注． 正規化されたアイゼンシュタイン級数は，

$$E_k(z)=\frac{1}{2}\sum_{\substack{m,n\in\mathbb{Z}\\(m,n)=1}}\frac{1}{(mz+n)^k}$$

という形にも書き表すことができる．

$k=2$ のときにも他の E_k と同じ定義によりアイゼンシュタイン級数を考えよう．しかし， $k=2$ のときの二重級数 (1) は絶対収束しないので和の順序に気をつける必要がある．また，結果として得られる正規化されたアイゼンシュタイン級数 E_2 は保型形式ではない．実際，次の命題のように変換のずれが生じる．

命題 3.3.

$$z^{-2}E_2\left(-\frac{1}{z}\right)=E_2(z)+\frac{12}{2\pi iz} \tag{8}$$

[証明]
(1) と (7) より，

$$
E_2(z) = \frac{1}{2\zeta(2)} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sideset{}{'}\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(mz+n)^2}
$$

$$
(9) \qquad = 1 + \frac{3}{\pi^2} \sum_{m\neq 0} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(mz+n)^2}\,, \qquad (m,n)\neq(0,0)
$$

と定める．(9) の内側の和は任意の $z \in \mathbb{H}$ と m に対して収束する．(9) より，

$$
z^{-2}E_2\left(-\frac{1}{z}\right) = \frac{1}{2\zeta(2)} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{-z^{-2}}{\left(-\frac{m}{z}+n\right)^2}
$$

$$
(10) \qquad = \frac{1}{2\zeta(2)} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(-m+nz)^2}
$$

ここで，

$$
a_{m,n} = a_{m,n}(z) = \frac{1}{(mz+n-1)(mz+n)} = \frac{1}{mz+n-1} - \frac{1}{mz+n}
$$

とおく． $(mz+n)^{-2}$ と $a_{m,n}(z)$ との差は $\frac{1}{(mz+n)^2(mz+n-1)}$ なので，次の $\tilde{E}_2$ が絶対収束することがわかる．

$$
\tilde{E}_2(z) = 1 + \frac{3}{\pi^2} \sum_{m\neq 0} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{1}{(mz+n)^2} - a_{m,n}(z) \right\}.
$$

$$
\tilde{E}_2(z) = 1 + \frac{3}{\pi^2} \sum_{m\neq 0} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(mz+n)^2} + \frac{3}{\pi^2} \sum_{m\neq 0} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{mz+n} - \frac{1}{mz+n-1} \right)
$$

と変形して $\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{mz+n} - \frac{1}{mz+n-1}\right) = 0$ に注意すると (9) より $\tilde{E}_2(z) = E_2(z)$ である．$\tilde{E}_2(z)$ の中の二重級数は絶対収束するので，

$$
E_2(z) = 1 + \frac{3}{\pi^2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m\neq 0} \left\{ \frac{1}{(mz+n)^2} - a_{m,n}(z) \right\}
$$

$$
(11) \qquad = z^{-2}E_2\left(-\frac{1}{z}\right) - \frac{3}{\pi^2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m\neq 0} a_{m,n}(z)
$$

そこで (11) 式の最後の二重級数を計算すればよい．この二重級数と (10) の中の和の差は，$(mz+n)^{-2} - a_{m,n}(z) = \frac{1}{(mz+n)^2(mz+n-1)}$ よりある絶対収束する級数である．一方 n のすべての正の約数について足し合わせることによって q^n の係数を集めてやると，

$$
\begin{aligned}
\sum_{m\neq 0}\frac{1}{(mz-n)^2} &= \frac{1}{z^2}\sum_{m\neq 0}\frac{1}{\left(-\frac{n}{z}+m\right)^2}\\
&= \frac{1}{z^2}\left(-\frac{z^2}{n^2}-\frac{4}{B_2}\zeta(2)\sum_{d=1}^{\infty}de^{\frac{-2\pi idn}{z}}\right)\\
&= \frac{1}{z^2}\left(-\frac{z^2}{n^2}-\frac{4\pi^2B_2}{B_2}\sum_{d=1}^{\infty}de^{\frac{-2\pi idn}{z}}\right)\\
&= -\frac{1}{n^2}-\frac{4\pi^2}{z^2}\sum_{d=1}^{\infty}de^{\frac{-2\pi idn}{z}}
\end{aligned}
$$

となる． $-\frac{1}{z}$ は $\mathbb{H}$ の固定された元なので，上の変形を用いると (10) の中の n に関する外側の和は絶対収束することもいえる．従って $\sum_n\sum_m a_{m,n}(z)$ も同じく絶対収束することがわかった．

これより，

$$
\begin{aligned}
\sum_{n=-\infty}^{\infty}\sum_{m\neq 0}a_{m,n}(z) &= \lim_{N\to\infty}\sum_{n=-N+1}^{N}\sum_{m\neq 0}a_{m,n}(z)\\
&= \lim_{N\to\infty}\sum_{m\neq 0}\sum_{n=-N+1}^{N}a_{m,n}(z) \qquad (12)
\end{aligned}
$$

最後の項の内側の和は打ち消しあって， $\frac{1}{mz-N}+\frac{1}{mz+N}$ ．また (5) から，

$$
\begin{aligned}
\sum_{m\neq 0}\left(\frac{1}{mz-N}+\frac{1}{mz+N}\right) &= \frac{2}{z}\sum_{m=1}^{\infty}\left(\frac{1}{-\frac{N}{z}+m}+\frac{1}{-\frac{N}{z}-m}\right)\\
&= \frac{2}{z}\pi\cot\left(-\frac{\pi N}{z}+\frac{z}{N}\right)
\end{aligned}
$$

こうして (12) は，

$$
\frac{2\pi}{z}\lim_{N\to\infty}\cot\left(-\frac{\pi N}{z}\right)=\frac{2\pi}{z}\lim_{N\to\infty}i\frac{e^{-2\pi iN/z}+1}{e^{-2\pi iN/z}-1}=\frac{-2\pi i}{z}
$$

に等しい．これを (11) に代入すると，

$$
\begin{aligned}
E_2(z) &= z^{-2}E_2\left(-\frac{1}{z}\right)-\frac{3}{\pi^2}\left(-\frac{2\pi i}{z}\right)\\
&= z^{-2}E_2\left(-\frac{1}{z}\right)+\frac{6i}{\pi z}\\
&= z^{-2}E_2\left(-\frac{1}{z}\right)-\frac{12}{2\pi iz}
\end{aligned}
$$

を得る．よって証明は完了した．

[証明終わり]

もうひとつの例を与える.

命題 3.4. テータ関数

$$\theta(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{-\pi t n^2} \qquad (\mathrm{Re}\ \ t > 0)$$

は，関数等式

$$\theta(t) = t^{-\frac{1}{2}}\theta\left(\frac{1}{t}\right)$$

を満たす.

[証明]　参考文献 [1] 参照 $\square$

$\Theta(z) = \theta(-2iz)$ とおくことで $z \in \mathbb{H}$ の関数を定義し，これもテータ関数と呼ぶことにする.

命題 3.5.

$$\Theta(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{2\pi i z n^2} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} q^{n^2}, \quad z \in \mathbb{H}, \quad q = e^{2\pi i z}$$

すると，

$$\Theta^4(z) = \left(\frac{2z}{i}\right)^{-2}\Theta^4\left(-\frac{1}{4z}\right) \tag{13}$$

$$\Theta(z) + \Theta\left(z + \frac{1}{2}\right) = 2\Theta(4z) \tag{14}$$

が成り立つ.

[証明]

命題 3.4 の θ に対する関数等式で t に $-2iz$ を代入すると，

$$\theta(-2iz) = (-2iz)^{-\frac{1}{2}}\theta\left(\frac{1}{-2iz}\right).$$

ゆえに，

$$\Theta(z) = \left(\frac{2z}{i}\right)^{-\frac{1}{2}}\theta\left(-2i\frac{1}{-2i}\frac{1}{-2iz}\right) = \left(\frac{2z}{i}\right)^{-\frac{1}{2}}\Theta\left(-\frac{1}{4z}\right) \tag{15}$$

(15) の両辺を 4 乗すると (13) を得る．また,

$$\begin{aligned}\Theta(z) + \Theta\left(z + \frac{1}{2}\right) &= \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{2\pi i n^2 z} + \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{2\pi i n^2 (z+\frac{1}{2})} \\ &= \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{2\pi i n^2 z}(1 + e^{\pi i n^2})\end{aligned}$$

ここで,

$$e^{\pi i n^2} = \begin{cases} 1\,, & n\ \text{：偶数} \\ -1\,, & n\ \text{：奇数} \end{cases}$$

となることより,

$$\begin{aligned}\Theta(z)+\Theta\left(z+\frac{1}{2}\right) &= 2\sum_{n:even} e^{2\pi i n^2 z} = 2\sum_{m\in\mathbb{Z}} e^{2\pi i(2m)^2 z} \\ &= 2\sum_{m\in\mathbb{Z}} e^{2\pi i m^2 4z} = 2\Theta(4z)\end{aligned}$$

[証明終わり]

命題 3.6.

$\Theta^4 \in M_2(\Gamma_0(4))$ である．そして各カスプでの Θ^4 の値は，$\Theta^4(\infty)=1$,$\Theta^4(0)=-\frac{1}{4}$,$\Theta^4\left(-\frac{1}{2}\right)=0$ となる．

[証明]

$\gamma \in \Gamma_0(4)$ に対する $[\gamma]_2$ の下での不変性を証明する．$\Gamma_0(4)$ は $-I, T, ST^4S$ によって生成されているのでこれらの元についての変換法則を確かめる．$-I$ についての変換法則は

$$\Theta^4(z)\big|[-I]_2 = (-1)^{-2}\Theta^4(z) = \Theta^4(z)\ .$$

次に T についての変換法則を確かめると

$$\Theta^4(z)\big|[T]_2 = \Theta^4(z+1) = \left(\sum e^{2\pi i n^2(z+1)}\right)^4 = \sum e^{2\pi i n^2 z} e^{2\pi i n^2} = \Theta^4(z)$$

となって成り立つ．最後に $ST^4S = \left(\begin{smallmatrix} -1 & 0 \\ 4 & -1 \end{smallmatrix}\right)$ についての変換法則を確かめる．

$\alpha_4 = \left(\begin{smallmatrix} 0 & -1 \\ 4 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ とおくと，$\alpha_4^{-1} = -\frac{1}{4}\alpha_4$ であり $\alpha_4\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)\alpha_4^{-1} = \left(\begin{smallmatrix} d & -c/4 \\ -4d & a \end{smallmatrix}\right)$ であるので,

$$ST^4S = -\alpha_4 T\alpha_4^{-1} = \frac{1}{4}\alpha_4 T\alpha_4$$

とできる．命題 3.5 の (13) より,

$$\Theta^4(z)\big|[\alpha_4]_2 = 4(4z)^{-2}\Theta^4\left(\frac{-1}{4z}\right) = 4(4z)^{-2}\left(\frac{2z}{i}\right)^2\Theta^4(z) = -\Theta^4(z)$$

となることを使うと,

$$\Theta^4(z)\big|[ST^4S]_2 = \Theta^4(z)\big|[\frac{1}{4}\alpha_4 T\alpha_4]_2 = -\Theta^4(z)\big|[T\alpha_4]_2 = -\Theta^4(z)\big|[\alpha_4]_2 = \Theta^4(z)$$

よって成り立つ．

次にカスプでの条件（カスプ条件）を調べよう．Θ は $\Gamma_0(4)$ の元で不変であり，Γ の $\Gamma_0(4)$ 同値類の代表元と対応する．カスプ ∞ , 0 , $-\frac{1}{2}$ で調べれば十分であることに注意しておく．まずカスプ ∞ での値は，Θ^4 の q 展開

$$\Theta^4(z) = \left(\sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{2\pi i n^2 z}\right)^4 = 1 + 8q + \cdots \ ,$$

より 1 である．

カスプ 0 での値を求めるために $[S]_2$ を作用させる．

$$\Theta^4(z)\big|[S]_2 = z^{-2}\Theta^4\left(-\frac{1}{z}\right) = z^{-2}\Theta^4\left(-\frac{1}{4\frac{z}{4}}\right) = z^{-2}\left(-\frac{z^2}{4}\right)\Theta^4\left(-\frac{z}{4}\right) .$$

$z^{-2}\big(-\frac{z^2}{4}\big)\Theta^4\big(-\frac{z}{4}\big)$ は $z\to\infty$ で $-\frac{1}{4}$ に収束する．よって $\Theta^4(z)$ の 0 での値は $-\frac{1}{4}$ である．

カスプ $-\frac{1}{2}$ での値は (15) より，

$$\begin{aligned}
\Theta^4(z)\big|[ST^{-2}S]_2 &= \Theta^4(z)\big|[\left(\begin{smallmatrix}-1 & 0\\ -2 & -1\end{smallmatrix}\right)]_2 = (-2z-1)^{-2}\Theta^4\left(\frac{-z}{-2z-1}\right)\\
&= (2z+1)^{-2}\Theta^4\left(\frac{-1}{-2-\frac{1}{z}}\right) = (2z+1)^{-2}\Theta^4\left\{\frac{-1}{4\left(-\frac{1}{4z}-\frac{1}{2}\right)}\right\}\\
&= (2z+1)^{-2}\left\{\frac{2}{i}\left(-\frac{1}{4z}-\frac{1}{2}\right)\right\}^2\Theta^4\left(-\frac{1}{4z}-\frac{1}{2}\right) = -(2z)^{-2}\Theta^4\left(-\frac{1}{4z}-\frac{1}{2}\right) \qquad \text{((14) より，)}\\
&= -(2z)^{-2}\left\{2\Theta\left(-\frac{1}{z}\right)-\Theta\left(-\frac{1}{4z}\right)\right\}^4 = -(2z)^{-2}\left\{2\left(-\frac{z}{2i}\right)^{\frac{1}{2}}\Theta\left(\frac{z}{4}\right)-\left(-\frac{2z}{i}\right)^{\frac{1}{2}}\Theta(z)\right\}^4\\
&= \left\{\Theta\left(\frac{z}{4}\right)-\Theta(z)\right\}^4
\end{aligned}$$

となることに注意する．そして $\big\{\Theta\big(\frac{z}{4}\big)-\Theta(z)\big\}^4$ は $z\to\infty$ で 0 に収束する．よって $\Theta^4(z)$ の $-\frac{1}{2}$ での値は 0 である．

[証明終わり]

4 $\Gamma_0(4)$ の保型形式の決定

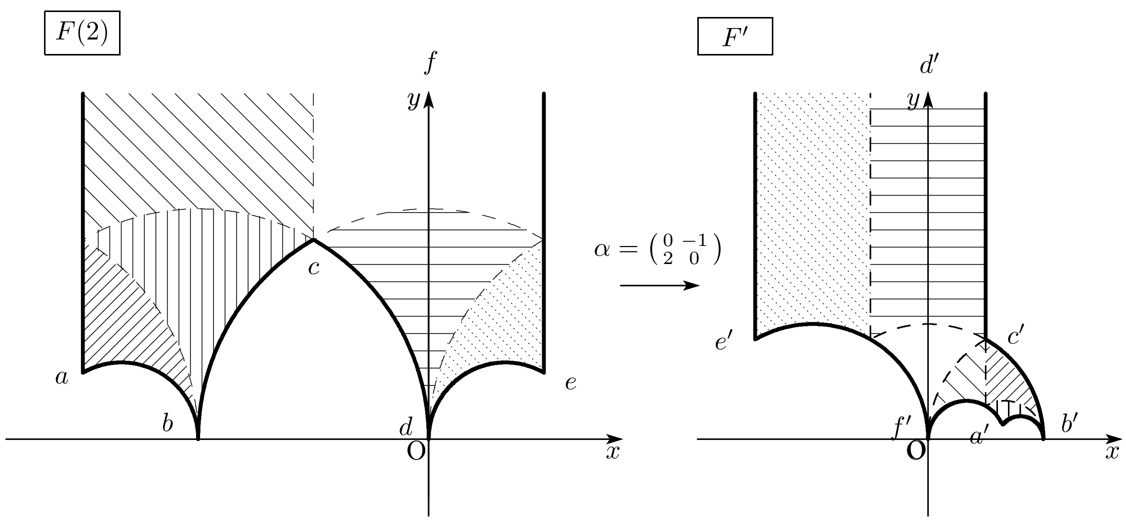
Γ' を Γ の部分群とする． $\mathbb{H}$ の 2 点 $z_1, z_2 \in \mathbb{H}$ に対して Γ' のある元 γ' が存在して $z_2 = \gamma' z_1$ となるとき z_1, z_2 は Γ' 同値であるという．

F を $\mathbb{H}$ 内の閉領域としよう． $\mathbb{H}$ のすべての点 z が F のある点に Γ' 同値であるが，F の 2 つの相異なる F どの内点も Γ' 同値になることがない（ F の境界上の 2 点は Γ' 同値でもかまわない）とき，F を Γ' に対する基本領域という．

$\Gamma(2)$ のひとつの基本領域は，Γ の基本領域 F として有名な $\left\{z \in \mathbb{C} \mid |z| \geq 1, -\frac{1}{2} \leq \mathrm{Re}\, z \leq \frac{1}{2}\right\}$ をとるとき，F と Γ の $\Gamma(2)$ に関する剰余類の代表系として選ばれた以下の α_i から $F(2) = \bigcup_{i=1}^{6} \alpha_i^{-1} F$ という形で得られることがわかる．

$$\begin{aligned}
&\alpha_1 = I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, &&\alpha_2 = T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, &&\alpha_3 = S = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\
&\alpha_4 = TS = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, &&\alpha_5 = ST = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, &&\alpha_6 = T^{-1}ST = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

このとき， $\alpha = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ に対する $F' = \alpha F(2)$ は $\Gamma_0(4) = \alpha\Gamma(2)\alpha^{-1}$ の基本領域である．F' の境界は次のものから構成されている．$(-3+i\sqrt{3})/4$ と $(1+i\sqrt{3})/4$ から無限遠点まで延びる 2 本の垂直線，半径が $\frac{1}{2}$ で一つは $-\frac{1}{2}$ を中心とし，もう一つは 0 を中心とする 2 つの円の円弧．半径 $\frac{1}{6}$ ，中心 $\frac{1}{6}$ の円上で 0 から $(9+i\sqrt{3})/28$ までの円弧．そして半径 $\frac{1}{10}$ ，中心 $\frac{4}{10}$ の円上で $(9+i\sqrt{3})/28$ から $\frac{1}{2}$ までの円弧である．F' の境界上の $\Gamma_0(4)$ 同値な点は互いに同一視されていると考える．



（図 1． $\Gamma(2)$ の基本領域 $F(2)$ と $\Gamma_0(4)$ の基本領域 F' ：α によって点 $a, b, c, d, e, f(=\infty)$ はそれぞれ点 $a', b', c', d'(=\infty), e', f'$ へうつる）

定理 4.1. F' 内の楕円点，つまり i か ω に Γ 同値となる点は以下のものがある．
i に Γ 同値である F' の内点は i と $\frac{2+i}{5}$ ． ω に Γ 同値である F' の内点は ω と $\frac{5+\sqrt{3}i}{14}$ ．また，i に Γ 同値である境界点は $\frac{-1+i}{2}$ と $\frac{-3+i}{10}$ であり，どんな境界点も ω と Γ 同値にはならない．

[証明]

Γ の $\Gamma_0(4)$ に関する剰余類分解は

$$
\begin{aligned}
\Gamma &= \bigcup_{j=1}^{6} \Gamma_0(4)\beta_j \\
&= \Gamma_0(4)\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) + \Gamma_0(4)\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{smallmatrix}\right) + \Gamma_0(4)\left(\begin{smallmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right) + \Gamma_0(4)\left(\begin{smallmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right) + \Gamma_0(4)\left(\begin{smallmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{smallmatrix}\right) + \Gamma_0(4)\left(\begin{smallmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 3 \end{smallmatrix}\right)
\end{aligned}
$$

で与えられる．ただし

$$
\begin{array}{lll}
\beta_1 = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right), & \beta_2 = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{smallmatrix}\right), & \beta_3 = \left(\begin{smallmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right) \\
\beta_4 = \left(\begin{smallmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right), & \beta_5 = \left(\begin{smallmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{smallmatrix}\right), & \beta_6 = \left(\begin{smallmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 3 \end{smallmatrix}\right)
\end{array}
$$

すると， i,ω に Γ 同値となる点は $\beta_j i, \beta_j\omega (j=1,\cdots,6)$ に $\Gamma_0(4)$ 同値となる．それらを計算してみると，

$$
\begin{array}{lll}
\beta_1 i = i\ , & \beta_2 i = \frac{2+i}{5}\ , & \beta_3 i = i\ , \\
\beta_4 i = \frac{-1+i}{2}\ , & \beta_5 i = \frac{-2+i}{5}\ , & \beta_6 i = \frac{-3+i}{10}\ , \\
\beta_1 \omega = \omega\ , & \beta_2 \omega = \frac{3+i\sqrt{3}}{6}\ , & \beta_3 \omega = \frac{1+i\sqrt{3}}{2}\ , \\
\beta_4 \omega = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\ , & \beta_5 \omega = \frac{-3+i\sqrt{3}}{6}\ , & \beta_6 \omega = \frac{-5+i\sqrt{3}}{14}\ ,
\end{array}
$$

となる． $\Gamma_0(4)$ 同値を $\sim$ であらわすことにすると，

$$
\beta_2 i \sim \beta_5 i, \quad \beta_4 i \sim \beta_6 i, \quad \beta_1\omega \sim \beta_3\omega \sim \beta_4\omega, \quad \beta_2\omega \sim \beta_5\omega \sim \beta_6\omega \sim \frac{5+i\sqrt{3}}{14}
$$

であることがわかる．実際 $\left(\begin{smallmatrix} -3 & -1 \\ 4 & 1 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 1 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ -4 & 1 \end{smallmatrix}\right) \in \Gamma_0(4)$ を使って計算してみると，

$$
\begin{aligned}
\left(\begin{smallmatrix} -3 & -1 \\ 4 & 1 \end{smallmatrix}\right)\beta_6 i &= \left(\begin{smallmatrix} -3 & -1 \\ 4 & 1 \end{smallmatrix}\right)\frac{-3+i}{10} = \frac{-1+i}{2} = \beta_4 i \\
\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 1 \end{smallmatrix}\right)\beta_5 i &= \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 1 \end{smallmatrix}\right)\frac{-2+i}{5} = \frac{2+i}{5} = \beta_2 i \\
\left(\begin{smallmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)\beta_3 \omega &= \left(\begin{smallmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)\frac{1+i\sqrt{3}}{2} = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2} = \beta_1\omega = \beta_4\omega \\
\left(\begin{smallmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)\beta_2 \omega &= \left(\begin{smallmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)\frac{3+i\sqrt{3}}{6} = \frac{-3+i\sqrt{3}}{6} = \beta_5\omega \\
\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ -4 & 1 \end{smallmatrix}\right)\beta_5 \omega &= \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ -4 & 1 \end{smallmatrix}\right)\frac{-3+i\sqrt{3}}{6} = \frac{-5+i\sqrt{3}}{14} = \beta_6\omega \\
\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 1 \end{smallmatrix}\right)\beta_5 \omega &= \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 1 \end{smallmatrix}\right)\frac{-3+i\sqrt{3}}{6} = \frac{5+i\sqrt{3}}{14}
\end{aligned}
$$

となることがわかる．

最後に $\beta_5\omega = \frac{-3+i\sqrt{3}}{6}$ を基本領域 F' の内点 $\frac{5+i\sqrt{3}}{14}$ へうつす行列 $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 1 \end{smallmatrix}\right) \in \Gamma_0(4)$ の求め方を示しておく．

$\beta_5\omega$ が α でうつされてくる前の点 $\alpha^{-1}\beta_5\omega = \frac{3+i\sqrt{3}}{4}$ を考える．さらに $\frac{3+i\sqrt{3}}{4}$ に $S = \left(\begin{smallmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ をかけると，

$$
S\alpha^{-1}\beta_5\omega = S\frac{3+i\sqrt{3}}{4} = \left(\begin{smallmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)\frac{3+i\sqrt{3}}{4} = \frac{-3+i\sqrt{3}}{3}
$$

を得るが， $\frac{-3+i\sqrt{3}}{3}$ は Γ の基本領域 F の内点ではない．そこで $ST = \left(\begin{smallmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right) \in \Gamma$ を使って $\frac{-3+i\sqrt{3}}{3}$ をうつすと，

$$
STS\alpha^{-1}\beta_5\omega = \left(\begin{smallmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right)\frac{-3+i\sqrt{3}}{3} = i\sqrt{3} \in F
$$

となる．STS は $\Gamma(2)$ の元を用いてどの様に表されるかを調べるために，$\alpha_i^{-1}STS$ $(i=1,\cdots,6)\in\Gamma(2)$ となる i を探すと，

$$\alpha_6^{-1}STS\left(\begin{smallmatrix}1&2\\-1&-1\end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix}0&-1\\1&0\end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix}1&1\\0&1\end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix}0&-1\\1&0\end{smallmatrix}\right)=\left(\begin{smallmatrix}1&-2\\0&1\end{smallmatrix}\right)\in\Gamma(2)\,.$$

よって

$$\begin{gathered}STS\alpha^{-1}\beta_5\omega=\alpha_6\left(\begin{smallmatrix}1&-2\\0&1\end{smallmatrix}\right)\alpha^{-1}\beta_5\omega\in F\\ \left(\begin{smallmatrix}1&-2\\0&1\end{smallmatrix}\right)\alpha^{-1}\beta_5\omega\in\alpha_6^{-1}F\subset F(2)\\ \alpha\left(\begin{smallmatrix}1&-2\\0&1\end{smallmatrix}\right)\alpha^{-1}\beta_5\omega\in\alpha F(2)=F'\,.\end{gathered}$$

つまり $\beta_5\omega \quad =\frac{-3+i\sqrt{3}}{6}$ を $\frac{5+i\sqrt{3}}{14}$ へうつす行列は

$$\alpha\left(\begin{smallmatrix}1&-2\\0&1\end{smallmatrix}\right)\alpha^{-1}=\left(\begin{smallmatrix}0&-1\\2&0\end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix}1&-2\\0&1\end{smallmatrix}\right)\frac{1}{2}\left(\begin{smallmatrix}0&1\\-2&0\end{smallmatrix}\right)=\left(\begin{smallmatrix}1&0\\4&1\end{smallmatrix}\right)$$

と求められる．

[証明終わり]

次の定理はリーマン・ロッホの定理と呼ばれる保型関数論の基本定理の特殊な場合を与える．

定理 4.2. $f(z)$ を $\Gamma_0(4)$ に関する偶数ウェイト k の零でない保型関数とする．$v_P(f)$ を点 P での $f(z)$ の零点または極の位数であるとする．またカスプ $P=\alpha^{-1}\infty$ に対する $v_P(f)$ は， $f\big|[\alpha^{-1}]_k$ のフーリエ展開の零でない係数を持つ最初の項の q_h に関するべき指数であるとする．（ここで h は分岐指数である）このとき，

$$\Sigma_{P\in F'}v_P(f)=k/2$$

である．ただし，この和は $\Gamma_0(4)$ の 3 つのカスプを含む基本領域 F' 内のすべての点をわたるものとするが，$\left\{-\frac{3}{4}+iy,\frac{1}{4}+iy\right\}$ や $\left\{-\frac{3}{4}+i\frac{\sqrt{3}}{4},\frac{1}{4}+i\frac{\sqrt{3}}{4},\frac{9}{28}+i\frac{\sqrt{3}}{28}\right\}$ のような $\Gamma_0(4)$ 同値な境界の集合に対してはその内の一点だけをとるものとする，

補題 4.1. $\gamma=\left(\begin{smallmatrix}a&b\\c&d\end{smallmatrix}\right)\in\Gamma, c\neq0$ とし，$f(z)$ を $\mathbb{H}$ 上の有理型関数で曲線 $C\in\mathbb{H}$ の上には零点も極も持たないものとする．$g(z)=f(z)\big|[\gamma]_k$ とおく．このとき，

$$\int_C\frac{g'(z)}{g(z)}dz-\int_{\gamma C}\frac{f'(z)}{f(z)}dz=-k\int_C\frac{dz}{z+(d/c)}$$

となる．

[証明]

(16)
$$f(\gamma z)=(cz+d)^kg(z)$$

を両辺微分すると，

(17)
$$f'(\gamma z)\frac{d\gamma z}{dz}=(cz+d)^kg'(z)+kc(cz+d)^{k-1}g(z)$$

式 (17) を式 (16) で割ると，

$$\frac{f'(\gamma z)}{f(\gamma z)}\frac{d\gamma z}{dz} = \frac{g'(z)}{g(z)} + \frac{kc}{cz+d}$$

よって，

$$\frac{g'(z)}{g(z)} - \frac{f'(\gamma z)}{f(\gamma z)}\frac{d\gamma z}{dz} = -k\frac{1}{z+(d/c)}$$

$$\int_C \frac{g'(z)}{g(z)}dz - \int_C \frac{f'(\gamma z)}{f(\gamma z)}\frac{d\gamma z}{dz}dz = -k\int_C \frac{dz}{z+(d/c)}$$

$$\int_C \frac{g'(z)}{g(z)}dz - \int_{\gamma C} \frac{f'(z)}{f(z)}dz = -k\int_C \frac{dz}{z+(d/c)}$$

を得る．

[証明終わり]

[定理 4.2 の証明] 合同部分群 $\Gamma_0(4) = \alpha\Gamma(2)\alpha^{-1}$ の前に考えた基本領域 $F' = \alpha F(2)$ を考える．（以下の図 2 参照）

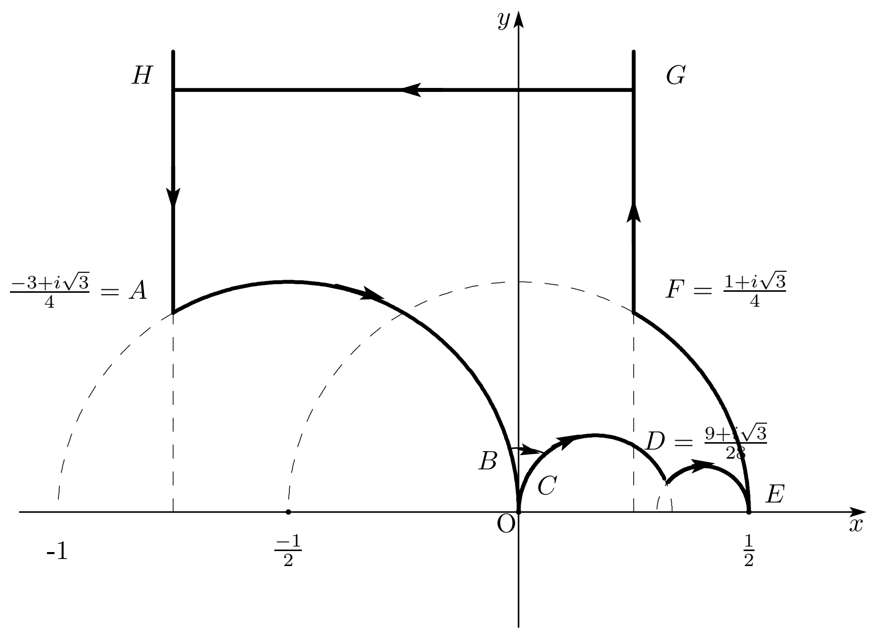
零でない保型関数 f は変数変換 $z \mapsto q = e^{2\pi iz}$ のもとでカスプ ∞ で有理型なので虚部 $\operatorname{Im} z$ が十分大きいところでは $f(z)$ は零点も極も持たないことがわかる．そこで F' の境界上の点 G, H を $\operatorname{Im} G = \operatorname{Im} H < \operatorname{Im} z$ では $f(z)$ が零点も極も持たないようなものとしてとる．

また点 $A = \frac{-3+i\sqrt{3}}{4}, B, C, D = \frac{9+i\sqrt{3}}{28}, E, F = \frac{1+i\sqrt{3}}{4}, G, H$ を図 2 のようにとる．ただし BC は 十分小さい半径 ε を持ち，原点 O で実軸に接する円の円弧であるとする．本来はカスプ E のところも B, C の様に分けるべきだが計算と説明を簡単にするために省略して扱うことにする．すなわち f は積分路に零点も極も持たないが，カスプ 0 では零点や極を持ってもよいと仮定しておく．

留数定理より，

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{ABCDEFGH} \frac{f'(z)}{f(z)}dz = \sum_{P\in F'} v_P(f) \tag{18}$$

であるので，(18) の積分をわけて計算する．ただし，ここで f は積分路上に零点も極も持たない（カスプ 0 では零点や極を持ってもよい）と仮定する．



（図 2． $\Gamma_0(4)$ の基本領域 F'）

まず， H から A への積分は， $f(z+1)=f(z)$ で直線の向きが逆なので，F から G への積分と打ち消しあう．

次に， BC 間の積分の値を求める．BC は 原点 O で実軸に接する半径 ε の円の円弧であるとし，最終的に $\varepsilon \to 0$ での極限を求める．S を用いて弧 BC を $\mathrm{Re}\, z=-3$ と $\mathrm{Re}\, z=1$ の間の水平線に移すことができる．また， $g=f\big|[S]_k$ とおくとき， $f=g\big|[S]_k$ であることに注意して

補題 4.1 より，

$$\int_B^C \frac{f'(z)}{f(z)}dz = \int_{SB}^{SC} \frac{g'(z)}{g(z)}dz - k\int_B^C \frac{dz}{z+0/1}$$

右辺の後ろの項は， $z=\varepsilon(e^{i\theta}+1)$ とおくと，$\frac{dz}{d\theta}d\theta = i\varepsilon e^{i\theta}d\theta$ より

$$\left|\int_B^C \frac{dz}{z}\right| = \left|\int_B^C \frac{i\varepsilon e^{i\theta}d\theta}{\varepsilon e^{i\theta}+\varepsilon i}\right| = \left|i\int_B^C \frac{e^{i\theta}}{e^{i\theta}+i}d\theta\right| \le \int_B^C \frac{e^{i\theta}}{|e^{i\theta}+i|}d\theta$$

となり， $1 \le |e^{i\theta}+i|$ より，

$$\int_B^C \frac{dz}{z} \le \int_B^C d\theta \quad \to 0 \qquad (\theta \to 0)$$

となる．よって，

$$\int_B^C \frac{f'(z)}{f(z)}dz = \int_{SB}^{SC} \frac{g'(z)}{g(z)}dz$$

を得るので， $\int_{SB}^{SC} \frac{g'(z)}{g(z)}dz$ を求める．

変数変換 $q_4 = e^{2\pi i z/4}$ をする．$g(z)=f(z)\big|[S]_4 = \tilde{g}(q_4)$ をカスプ 0 での f の q_4 展開であるとする．

$$\frac{dg(z)}{dz}=\frac{d}{dz}\tilde{g}(q_4)=\frac{dq_4}{dz}\frac{d}{dq_4}\tilde{g}(q_4)$$

よって，

$$\int_{SB}^{SC}\frac{g'(z)}{g(z)}dz=\int_{SB}^{SC}\frac{\tilde{g}'(q_4)}{\tilde{g}(q_4)}\frac{dq_4}{dz}dz$$

いま

$$\tilde{g}(q_4)=a_{n_0}q_4^{n_0}+a_{n_0+1}q_4^{n_0+1}+\cdots,\qquad a_{n_0}\neq 0,\quad n_0=v_0(f)$$

なので，

$$\frac{g'(z)}{g(z)}=\frac{n_0a_{n_0}q_4^{n_0-1}+(n_0+1)a_{n_0+1}q_4^{n_0}+\ldots}{a_{n_0}q_4^{n_0}+a_{n_0+1}q_4^{n_0+1}+\ldots}=\frac{n_0a_{n_0}q_4^{-1}+(n_0+1)a_{n_0+1}q_4^{0}+\ldots}{a_{n_0}+a_{n_0+1}q_4+\ldots}$$

である．この分母部分 $a_{n_0}+a_{n_0+1}q_4+\ldots$ 可逆なので，ある $a'_{n_0+1},b_2\in\mathbb{C}$ で

$$\begin{aligned}\frac{g'(z)}{g(z)}&=\left(\frac{1}{a_{n_0}}+a'_{n_0+1}q_4+\ldots\right)\left(n_0a_{n_0}q_4^{-1}+(n_0+1)a_{n_0+1}q_4^{0}+\ldots\right)\\&=n_0q_4^{-1}+b_0+b_1q_4+\ldots\end{aligned}$$

となる．よって，

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi i}\int_B^C\frac{f'(z)}{f(z)}dz&=\frac{1}{2\pi i}\int_{SB}^{SC}\frac{\tilde{g}'(q_4)}{\tilde{g}(q_4)}dq_4\\&=\frac{1}{2\pi i}\int_{SB}^{SC}(n_0q_4^{-1}+b_0+b_1q_4+\cdots)dq_4\end{aligned}$$

となる．この式の後半の正則な部分の積分は零になるので，$z=x+yi$ とおくとき， $q_4=e^{2\pi i(x+yi)/4}$ であることと，z が SB から SC へいくとき， y は一定値 y_0 であることに注意して

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi i}\int_B^C\frac{f'(z)}{f(z)}dz&=\frac{1}{2\pi i}\int_{SB}^{SC}n_0q_4^{-1}dq_4\\&=\frac{n_0}{2\pi i}\int_{-3}^{1}e^{-\frac{2\pi i}{4}x}e^{\frac{2\pi}{4}y}\frac{dq_4}{dx}dx\\&=\frac{n_0}{2\pi i}\int_{-3}^{1}e^{-\frac{2\pi i}{4}x}e^{\frac{2\pi}{4}y}\frac{2\pi i}{4}e^{\frac{2\pi i}{4}x}e^{\frac{2\pi}{4}y}dx\\&=\frac{n_0}{4}\int_{-3}^{1}dx=\frac{n_0}{4}(1-(-3))=n_0=-v_0(f)\end{aligned}$$

となる．次に，$\alpha_1=\left(\begin{smallmatrix}1&0\\4&1\end{smallmatrix}\right)\in\Gamma_0(4)$ を用いて弧 AB を弧 DC に移してやると，補題 4.1 より，

$$
\begin{aligned}
\int_A^B \frac{f'(z)}{f(z)}dz + \int_C^D \frac{f'(z)}{f(z)}dz &= \int_A^B \frac{f'(z)}{f(z)}dz + \int_{\alpha_1 B}^{\alpha_1 A} \frac{f'(z)}{f(z)}dz \\
&= \int_A^B \frac{f'(z)}{f(z)}dz - \int_{\alpha_1 A}^{\alpha_1 B} \frac{f'(z)}{f(z)}dz \\
&= -k \int_A^B \frac{dz}{z+\frac{1}{4}} \\
&\sim -k \int_A^0 \frac{dz}{z+\frac{1}{4}} = -k \int_{\frac{-2+\sqrt{3}i}{4}}^{\frac{1}{4}} \frac{dz}{z}
\end{aligned}
$$

同様に， $\alpha_2 = \left(\begin{smallmatrix} 3 & -1 \\ 4 & -1 \end{smallmatrix}\right) \in \Gamma_0(4)$ を用いて弧 DE を弧 FE に移してやると，

$$
\begin{aligned}
\int_D^E \frac{f'(z)}{f(z)}dz + \int_E^F \frac{f'(z)}{f(z)}dz &= \int_D^E \frac{f'(z)}{f(z)}dz + \int_{\alpha_2 E}^{\alpha_2 D} \frac{f'(z)}{f(z)}dz \\
&= \int_D^E \frac{f'(z)}{f(z)}dz - \int_{\alpha_2 D}^{\alpha_2 E} \frac{f'(z)}{f(z)}dz \\
&= -k \int_D^E \frac{dz}{z+\frac{-1}{4}} \\
&\sim -k \int_{\frac{9+\sqrt{3}i}{28}}^{\frac{1}{2}} \frac{dz}{z+\frac{-1}{4}} = -k \int_{\frac{2+\sqrt{3}i}{28}}^{\frac{1}{4}} \frac{dz}{z}\ .
\end{aligned}
$$

よって，積分路をたどってやると $\log(-1) = -\pi i$ とならなけらばならないことに注意すると，

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2\pi i}\left\{\int_A^B \frac{f'(z)}{f(z)}dz + \int_C^D \frac{f'(z)}{f(z)}dz + \int_D^E \frac{f'(z)}{f(z)}dz + \int_E^F \frac{f'(z)}{f(z)}dz\right\} \\
&\quad = \frac{1}{2\pi i}\left\{-k\int_{\frac{-2+\sqrt{3}i}{4}}^{\frac{1}{4}} \frac{dz}{z} + -k\int_{\frac{2+\sqrt{3}i}{28}}^{\frac{1}{4}} \frac{dz}{z}\right\} = \frac{1}{2\pi i}\left\{-k[\log z]_{\frac{-2+\sqrt{3}i}{4}}^{\frac{1}{4}} + -k[\log z]_{\frac{2+\sqrt{3}i}{28}}^{\frac{1}{4}}\right\} \\
&\quad = \frac{1}{2\pi i}\left\{-k\log\frac{1}{-2+\sqrt{3}i} - k\log\frac{7}{2+\sqrt{3}i}\right\} = \frac{1}{2\pi i}\left\{-k\log\frac{-(2-\sqrt{3}i)(2+\sqrt{3}i)}{7}\right\} \\
&\quad = \frac{1}{2\pi i}\{-k\log(-1)\} = \frac{-k(-\pi i)}{2\pi i} = \frac{k}{2}
\end{aligned}
$$

となる．

[証明終わり]

この定理を用いて $\Gamma_0(4)$ の保型形式の空間を，具体的に与えられる 2 つの生成元で記述してやろう．生成元のひとつはテータ級数 Θ^4 であるがもうひとつは次のように定義されるものである．

定義 4.1.

$$
F(z) = -\frac{1}{24}\big(E_2(z) - 3E_2(2z) + 2E_2(4z)\big) = \sum_{n:\text{奇数}>0} \sigma_1(n)q^n
$$

とする．

命題 4.1. $F(z) \in M_2(\Gamma_0(4))$ である．特に各カスプでの $F(z)$ の値は，$F(\infty) = 0$, $F(0) = -\frac{1}{64}$, $F\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{16}$ となる．

まず補題を準備する．

補題 4.2.

(1) $\alpha \in GL_2^+(\mathbb{Q})$ に対し $g(z) = f(\alpha z)$ とする．ここで $\gamma = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \Gamma$ に対し， $f(\alpha z)\big|[\gamma]_k = (c\alpha z + d)^{-k} f(\gamma\alpha z)$ であると定義されていて，これは $g(z)\big|[\gamma]_k = (cz+d)^{-k} f(\alpha\gamma z)$ と同じではないことに注意する．

$\alpha = \left(\begin{smallmatrix} n & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ であるとき，すなわち $\alpha z = nz$ であるとき，

$$g(z)\big|[\gamma]_k = f(\alpha z)\big|[\alpha\gamma\alpha^{-1}]_k = f(nz)\big|[\left(\begin{smallmatrix} a & nb \\ c/n & d \end{smallmatrix}\right)]_k$$

となる．

(2) $a \in \mathbb{Z}$ に対して，

$$E_2(ST^{-a}Sz) = (az+1)^2 E_2(z) - \frac{6ai}{\pi}(az+1)$$

となる．

(3) $E_2(z) = 1 - 24\sum_{n=1}^{\infty} \sigma_1(n) q^n$（ただし， $q^n = e^{2\pi inz}$ ）に対して，

$$E_2(z) - 3E_2(2z) + 2E_2(4z) = \frac{1}{2}\left\{E_2(z) - E_2\left(z + \frac{1}{2}\right)\right\}$$

となる．

[証明]

(1) $g(z)\big|[\gamma]_k, f(\alpha z)\big|[\alpha\gamma\alpha^{-1}]_k, f(nz)\big|[\left(\begin{smallmatrix} a & nb \\ c/n & d \end{smallmatrix}\right)]_k$ をそれぞれ計算する．

$$\begin{aligned} g(z)\big|[\gamma]_k &= (cz+d)^{-k} g(\gamma z) = (cz+d)^{-k} f(\alpha\gamma z) \\ f(\alpha z)\big|[\alpha\gamma\alpha^{-1}]_k &= f(\alpha z)\big|[\left(\begin{smallmatrix} a & nb \\ c/n & d \end{smallmatrix}\right)]_k = \left(\frac{c}{n}\alpha z + d\right)^{-k} f(\alpha\gamma\alpha^{-1}\alpha z) = (cz+d)^{-k} f(\alpha\gamma z) \\ f(nz)\big|[\left(\begin{smallmatrix} a & nb \\ c/n & d \end{smallmatrix}\right)]_k &= \left(\frac{c}{n}nz + d\right)^{-k} f(\alpha\gamma z) = (cz+d)^{-k} f(\alpha\gamma z) \end{aligned}$$

よって成り立つ．

(2) (8) より，

$$E_2(Sz) = E_2\left(-\frac{1}{z}\right) = z^2 E_2(z) + \frac{12}{2\pi i} z$$

でありまた，(7) より，

$$\begin{aligned} E_2(z-a) &= 1 - 24\sum_{n=1}^{\infty} \sigma_{k-1}(n) e^{2\pi in(z-a)} \\ &= 1 - 24\sum_{n=1}^{\infty} \sigma_{k-1}(n) e^{2\pi inz} e^{-2\pi ina} = E_2(z) \end{aligned}$$

であることを用いて,

$$
\begin{aligned}
E_2(ST^{-a}Sz) &= E_2\left(S\left(\frac{-az-1}{z}\right)\right) = E_2\left(S\left(-a-\frac{1}{z}\right)\right) \\
&= \left(-a-\frac{1}{z}\right)^2 E_2\left(-a-\frac{1}{z}\right) + \frac{6}{\pi i}\left(-a-\frac{1}{z}\right) = \left(a+\frac{1}{z}\right)^2 E_2\left(-\frac{1}{z}\right) + \frac{6}{\pi i}\left(-a-\frac{1}{z}\right) \\
&= \left(a+\frac{1}{z}\right)^2 \left\{z^2 E_2(z) + \frac{6}{\pi i} z\right\} + \frac{6}{\pi i}\left(-a-\frac{1}{z}\right) = (az+1)^2 E_2(z) - \frac{6ai}{\pi}(az+1)
\end{aligned}
$$

となって証明された.

(3) まず右辺の $E_2(z) - E_2\left(z+\frac{1}{2}\right)$ を変形する.

$$
\begin{aligned}
E_2(z) - E_2\left(z+\frac{1}{2}\right) &= 1 - 24\sum_{n=1}^{\infty}\sigma_1(n)q^n - \left\{1 - 24\sum_{n=1}^{\infty}\sigma_1(n)e^{2\pi i(z+\frac{1}{2})n}\right\} \\
&= -24\sum_{n=1}^{\infty}\sigma_1(n)q^n + 24\sum_{n=1}^{\infty}\sigma_1(n)q^n e^{\pi i n}
\end{aligned}
$$

ここで,

$$
e^{\pi i n} = \begin{cases} 1\ , & n\ :偶数 \\ -1\ , & n\ :奇数 \end{cases}
$$

であるので,

$$
E_2(z) - E_2\left(z+\frac{1}{2}\right) = -48\sum_{n:奇数>0}^{\infty}\sigma_1(n)q^n\ .
$$

次に左辺の $E_2(z) - 3E_2(2z) + 2E_2(4z)$ を変形する.

$$
\begin{aligned}
E_2(z) - 3E_2(2z) + 2E_2(4z) &= 1 - 24\sum_{n=1}^{\infty}\sigma_1(n)q^n - 3\left\{1 - 24\sum_{n=1}^{\infty}\sigma_1(n)q^{2n}\right\} + 2\left\{1 - 24\sum_{n=1}^{\infty}\sigma_1(n)q^{4n}\right\} \\
&= 1 - 3 + 2 - 24\left\{\sum_{n=1}^{\infty}\sigma_1(n)q^n - 3\sum_{n=1}^{\infty}\sigma_1(n)q^{2n} + 2\sum_{n=1}^{\infty}\sigma_1(n)q^{4n}\right\}
\end{aligned}
$$

ここで q^n の係数を考える. まず $q^n(n;奇数)$ の項は, $\sum_{n=1}^{\infty}\sigma_1(n)q^n$ の中にしかでてこないのでその係数は $\sigma_1(n)$.

次に q^n の $n = 2m(m;奇数)$ である項の係数は,

$$
\sigma_1(2m) - 3\sigma_1(m) = \sigma_1(2)\sigma_1(m) - 3\sigma_1(m) = 0\ .
$$

ただしここで, $\sigma_1(n) = \sum_{0<d|n} d$ は $a, b \in \mathbb{N}\ , gcd(a,b) = 1$ であるならば $\sigma_1(ab) = \sigma_1(a)\sigma_1(b)$ である.

最後に q^n の $n = 2^a m(m;奇数, a \geq 2)$ である項の係数は,

$$
\begin{aligned}
\sigma_1(2^a m) - 3\sigma_1(2^{a-1}m) + 2\sigma_1(2^{a-2}m) &= \bigl\{\sigma_1(2^a) - 3\sigma_1(2^{a-1}) + 2\sigma_1(2^{a-2})\bigr\}\sigma_1(m) \\
&= \bigl\{(1+\cdots+2^a) - 3(1+\cdots+2^{a-1}) + 2(1+\cdots+2^{a-2})\bigr\}\sigma_1(m) \\
&= \bigl\{(2^a-1) - 3(2^{a-1}-1) + 2(2^{a-2}-1)\bigr\}\sigma_1(m) \\
&= (2\cdot 2^a - 1 - 3\cdot 2^a + 3 + 2^a - 2)\sigma_1(m) = 0\ .
\end{aligned}
$$

よって,

$$
E_2(z) - 3E_2(2z) + 2E_2(4z) = -24 \sum_{n:\text{奇数}>0}^{\infty} \sigma_1(n) q^n\ .
$$

であり,

$\frac{1}{2}\bigl\{E_2(z) - E_2\bigl(z+\frac{1}{2}\bigr)\bigr\} = -24\sum_{n:\text{奇数}>0}^{\infty}\sigma_1(n)q^n$ が証明された.

[証明終わり]

[命題 4.1 の証明]

$\gamma \in \Gamma_0(4)$ に対する $[\gamma]_2$ の下での不変性を証明する. $\Gamma_0(4)$ は $-I, T, ST^4S$ によって生成されているのでこれらの元についての変換法則を確かめれば十分である.

まず T についての変換法則を確かめる.

$$
F(z)\bigl|[T]_2 = (1)^{-2}F(z+1) = F(z)
$$

よって成り立つ. また $[-I]_2$ での不変性は明らかである. 最後に補題 4.2 を用いて,

$$
\begin{aligned}
-24F(z)\bigl|[ST^{-4}S]_2 &= \bigl(E_2(z) - 3E_2(2z) + 2E_2(4z)\bigr)\bigl|[ST^{-4}S]_2 \\
&= E_2(z)\bigl|[ST^{-4}S]_2 - 3E_2(z)\bigl|[ST^{-2}S]_2 + 2E_2(z)\bigl|[ST^{-1}S]_2 \\
&= (-4z-1)^2E_2(ST^{-4}Sz) - 3(-4z-1)^2E_2(ST^{-2}S2z) + 2(-4z-1)^2E_2(ST^{-1}S4z) \\
&= (-4z-1)^2\left\{(4z+1)^2E_2(z) + \frac{24}{\pi i}(4z+1)\right\} \\
&\qquad - 3(-4z-1)^2\left\{(4z+1)^2E_2(2z) + \frac{12}{\pi i}(4z+1)\right\} \\
&\qquad\quad + 2(-4z-1)^2\left\{(4z+1)^2E_2(4z) + \frac{6}{\pi i}(4z+1)\right\} \\
&= E_2(z) + \frac{24}{\pi i}\cdot\frac{1}{4z+1} - 3\left\{E_2(2z) + \frac{12}{\pi i}\cdot\frac{1}{4z+1}\right\} + 2\left\{E_2(4z) + \frac{6}{\pi i}\cdot\frac{1}{4z+1}\right\} \\
&= E_2(z) - 3E_2(2z) + 2E_2(4z) = -24F(z)
\end{aligned}
$$

よって $F(z) \in M_2(\Gamma_0(4))$ である.

次に各カスプでの値を求めよう. カスプ ∞ での値は,

$$
F(z) = \sum_{n:\text{奇数}>0} \sigma_1(n)q^n = q + 4q^3 + \cdots
$$

より 0 である.

カスプ 0 での値を求めるために $[S]_2$ を作用させる．$F\big|[S]_2$ を求める際に $z\to\infty$ で零に収束する項を無視してやる．すると命題 (3.3) を用いて， $E_2(Sz)=z^2E_2(z)$ ．よって，

$$\begin{aligned}
F(z)\big|[S]_2 &= -\frac{1}{24}\big\{z^{-2}E_2(Sz)-3(2z)^{-2}E_2(2Sz)+2(4z)^{-2}E_2(4Sz)\big\}\\
&= -\frac{1}{24}\left\{E_2(z)-3\frac{1}{2^2}E_2\left(\frac{z}{2}\right)+2\frac{1}{4^2}E_2\left(\frac{z}{4}\right)\right\}
\end{aligned}$$

$-\frac{1}{24}\big\{E_2(z)-3\frac{1}{2^2}E_2\big(\frac{z}{2}\big)+2\frac{1}{4^2}E_2\big(\frac{z}{4}\big)\big\}$ は $z\to\infty$ で $-\frac{1}{24}\big(1-\frac{3}{4}+\frac{2}{16}\big)=-\frac{1}{64}$ に収束する．よって $F(z)$ の 0 での値は $-\frac{1}{64}$ である．

カスプ $-\frac{1}{2}$ での値を求めるために，同様に $z\to\infty$ で零に収束する項を無視してやる．補題 4.2 の (1) より，

$$\begin{aligned}
-24F(z)\big|[ST^{-2}S]_2 &= E_2(z)\big|[ST^{-2}S]_2-3E_2(2z)\big|[ST^{-2}S]_2+2E_2(4z)\big|[ST^{-2}S]_2\\
&= (-2z-1)^{-2}E_2(ST^{-2}Sz)-3(-2z-1)^{-2}E_2(ST^{-2}S2z)+2(-2z-1)^{-2}E_2\left(\frac{4z}{2z+1}\right)
\end{aligned}$$

命題 3.3 と補題 4.2 の (2) の結果から零に収束する項を無視してやると，補題 4.2 の (3) より，

$$\begin{aligned}
-24F(z)\big|[ST^{-2}S]_2 = (2z+1)^{-2}&\left\{(2z+1)^2E_2(z)-\frac{12i}{\pi}(2z+1)\right\}\\
&-3(2z+1)^{-2}\left\{(2z+1)^2E_2(2z)-\frac{6i}{\pi}(2z+1)\right\}\\
&+2(2z+1)^{-2}E_2\left(-\frac{1}{\frac{1}{2}-\frac{1}{4z}}\right)\\
&= E_2(z)-3E_2(2z)+2(2z+1)^{-2}\left(-\frac{1}{2}-\frac{1}{4z}\right)^2E_2\left(-\frac{1}{2}-\frac{1}{4z}\right)\\
&= E_2(z)-3E_2(2z)+\frac{1}{8}z^{-2}\left\{-E_2\left(-\frac{1}{4z}\right)+6E_2\left(-\frac{1}{2z}\right)-4E_2\left(-\frac{1}{z}\right)\right\}
\end{aligned}$$

ここで再び命題 3.3 を適用して零に収束する項を無視すると，

$$-24F(z)\big|[ST^{-2}S]_2 = E_2(z)-3E_2(2z)+\frac{1}{8}\big\{-16E_2(4z)+24E_2(2z)-4E_2(z)\big\}$$

$E_2(z)-3E_2(2z)+\frac{1}{8}\big\{-16E_2(4z)+24E_2(2z)-4E_2(z)\big\}$ は $z\to\infty$ で $1-3+\frac{1}{8}(-16+24-4)=-\frac{3}{2}$ に収束する．よって $F(z)$ の $-\frac{1}{2}$ での値は $-\frac{1}{24}\big(-\frac{3}{2}\big)=\frac{1}{16}$ である．

[証明終わり]

定理 4.3. Θ^4 の唯一の零点はカスプ $-\frac{1}{2}$ での 1 位の零点であり， F の唯一の零点はカスプ ∞ での 1 位の零点である．

[証明]

命題 4.1 より $F(\infty)=0$ であり，命題 3.6 より $\Theta^4\big(-\frac{1}{2}\big)=0$ であった．

定理 4.2 より,

$$\sum v_P(f) = \frac{k}{2}$$

であるが, 今 $k=2$ なので

$$\sum v_P(f) = 1$$

となる. つまり位数をすべて足して 1 なので, 零でない位数は唯一つしかない.

[証明終わり]

定理 4.4. Θ^4 と F が $M_2(\Gamma_0(4))$ を張る.

[証明]

$f \in M_2(\Gamma_0(4))$ であるとき,

$$g = f - f(\infty)\Theta^4 - 16f\left(-\frac{1}{2}\right)F \in M_2(\Gamma_0(4))$$

である. カスプ ∞ と $-\frac{1}{2}$ でのこの関数の値は,

$$f(\infty) - f(\infty)\Theta(\infty)^4 - 16f\left(-\frac{1}{2}\right)F(\infty) = f(\infty) - f(\infty) = 0.$$

$$\begin{aligned} f\left(-\frac{1}{2}\right) - f(\infty)\Theta\left(-\frac{1}{2}\right)^4 - 16f\left(-\frac{1}{2}\right)F\left(-\frac{1}{2}\right) &= f\left(-\frac{1}{2}\right) - 0 - 16f\left(-\frac{1}{2}\right)\frac{1}{16} \\ &= f\left(-\frac{1}{2}\right) - f\left(-\frac{1}{2}\right) = 0. \end{aligned}$$

よって, 2 つのカスプで零点を持つので, 上の関数 g が零関数でなければ $\sum v_P(g) = 2/2 = 1$ に矛盾.
すなわち, g は恒等的に 0 でなければならない. ゆえに

$$f = f(\infty)\Theta^4 + 16f\left(-\frac{1}{2}\right)F$$

である.

[証明終わり]

定理 4.5.

(1) $k < 0$ ならば $M_k(\Gamma_0(4)) = \{0\}$ である. また $k = 0$ ならば $M_k(\Gamma_0(4))$ は定数関数だけを含む.

(2) 負でない偶数 $k = 2k_0$ に対し, 任意の $f \in M_k(\Gamma_0(4))$ は Θ^4 と F に関する次数 k_0 の同次多項式として書き表される.

[証明]

(1) $k=0$ のとき, $f \in M(\Gamma_0(4))$ とし, c を $f(z)$ によってとられる任意の値とする. 定理 4.2 より,

$$\sum v_P(f) = \frac{k}{2} = 0/2 = 0$$

なので， $f(z)-c\in M_0(\Gamma_0(4))$ は恒等的に零であるか，それとも零点を持たないかのどちらかである．ところが，$f(z_0)=c$ と $z_0\in\mathbb{H}$ をとると，$f(z)=c$ は z_0 で零点を持つので $f(z)-c=0$ ．つまり $f(z)=c$ ．

(2) $k=2$ の時この主張は定理 4.4 より成立する．$k\geq 4$ として $k-2$ 以下の時主張が正しいと仮定する．関数 f_0 を $f_0=f-f(\infty)\Theta^{4k_0}$ とすると，これは $M_k(\Gamma_0(4))$ の元であり， f_0 は ∞ で零点を持つとしていい．定理 4.3 に注意してやると F は $\mathbb{H}$ 上で零点を持たず，またカスプでは ∞ でのみ 1 位の零点を持つ．したがって $f_0/F\in M_{k-2}(\Gamma_0(4))$ となる．すると帰納法の仮定より，P を k_0-1 次の同次多項式として，

$$f_0/F=P(\Theta^4,F)$$

とできる．ゆえに，

$$f_0=FP(\Theta^4,F)$$

となって，これは Θ^4,F に関して k_0 次同次多項式となり，$f_0=f-f(\infty)\Theta^{4k_0}$ であったので，

$$f=f(\infty)\Theta^{4k_0}+FP(\Theta^4,F)$$

となって証明できた.

[証明終わり]

系 4.1.

(1) $S_6(\Gamma_0(4))$ は 1 次元で $\Theta^8F-16\Theta^4F^2$ で張られる.

(2) $\eta^{12}(2z)=\Theta^8F-16\Theta^4F^2$ である．ただし $\eta(z)$ はデデキントのエータ関数 $\eta(z)=e^{\frac{2\pi iz}{24}}\Pi_n(1-q^n)$ である.

[証明]

(1) まず $\Theta^8F-16\Theta^4F^2$ がカスプ形式であることを示す.

$\Theta^8F-16\Theta^4F^2\in M_6(\Gamma_0(4))$ は明らかなので，各カスプで零となることを示す.

カスプ ∞ での値は,

$$\Theta^8(\infty)F(\infty)-16\Theta^4(\infty)F^2(\infty)=1\cdot 0-16\cdot 0=0\,.$$

カスプ 0 での値は,

$$\Theta^8(0)F(0)-16\Theta^4(0)F^2(0)=\left(-\frac{1}{4}\right)^4\cdot\left(-\frac{1}{64}\right)-16\left(-\frac{1}{4}\right)\cdot\left(-\frac{1}{64}\right)^2=0\,.$$

カスプ $-\frac{1}{2}$ での値は,

$$\Theta^8\left(-\frac{1}{2}\right)F\left(-\frac{1}{2}\right)-16\Theta^4\left(-\frac{1}{2}\right)F^2\left(-\frac{1}{2}\right)=0\cdot\left(\frac{1}{16}\right)-0\cdot\left(\frac{1}{16}\right)^2=0\,.$$

よって， $\Theta^8F-16\Theta^4F^2\in S_6(\Gamma_0(4))$ である.

次に， $f=a\Theta^{12}+b\Theta^8F+c\Theta^4F^2+dF^3$ とおき，f の各カスプでの値を見ると，Θ^4 や F のカスプでの値を用いて

$$f(\infty) = a\ , \quad f\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{d}{16^3}$$

がわかる．したがって $a = d = 0$ である．さらに，

$$f(0) = \left(-\frac{b}{4} - \frac{c}{64}\right)\left(-\frac{1}{64}\right)\left(-\frac{1}{4}\right)$$

となるので $c = -16b$ である．これより， $f = b(\Theta^8 F - 16\Theta^4 F^2)$ となって証明できた．

(2) $f(z) = \eta^{12}(2z)$ とおく． $\eta(z) = e^{\frac{2\pi iz}{24}} \prod(1-q^n)$ より，

$$\eta^{12}(z) = e^{\pi iz} \prod(1-q^n)^{12}\ ,$$
$$\eta^{12}(z+1) = e^{\pi iz} e^{\pi i} \prod(1-q^n)^{12} = -\eta^{12}(z)\ .$$

また， $\eta(z)$ と判別式関数のよく知られた関係 $\eta^{24}(z) = \Delta(z)$ より

$$f(z)^2 = \Delta(2z) \in S_{12}(\Gamma_0(2))$$

なので， f は各カスプで零点を持つことがわかる．

$\alpha = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ とすると，

$$\begin{aligned}
f\big|[\alpha]_6 &= (-2z+1)^{-6} f\left(-\frac{z}{2z+1}\right) \\
&= (-2z+1)^{-6} \eta^{12}\left(-\frac{2z}{2z+1}\right) \\
&= (-2z+1)^{-6} \eta^{12}\left(-1 + \frac{1}{2z+1}\right) \\
&= -(-2z+1)^{-6} \eta^{12}\left(\frac{1}{-2z+1}\right) \\
&= -(2z+1)^{-6}(-1)(2z-1)^6 \eta^{12}(2z-1) \\
&= -\eta^{12}(2z) = -f(z)\ .
\end{aligned}$$

よって， $f \notin M_6(\Gamma_0(2))$ である．また，

$$f\big|[T]_6 = f(z+1) = \eta^{12}(2z+2) = (-1)^2 \eta^{12}(2z) = f(z)$$

であり，

$$f\big|[\alpha^2]_6 = (f\big|[\alpha])\big|[\alpha]_6 = -f\big|[\alpha]_6 = f$$

である．よって， $T, \alpha^2 = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 1 \end{smallmatrix}\right), -I$ が $\Gamma_0(4)$ を生成するので f は $\Gamma_0(4)$ の作用で不変である．そして，
$S_6(\Gamma_0(4)) = \mathbb{C}(\Theta^8 F - 16\Theta^4 F^2)$

なのであとは ∞ での q 展開の係数を比較すれば等式が得られる．

[証明終わり]

定理 4.6. 6 以上の $k = 2k_0$ に対する任意の $f \in S_k(\Gamma_0(4))$ は，$\Theta^4 F(\Theta^4 - 16F)$ で割り切れるような F と Θ^4 に関する次数 k_0 の同次多項式の形に表される．

[証明]

$\Theta^4 F(\Theta^4 - 16F) = \phi$ とおく．ϕ は，定理 4.4 より各カスプで零をとるが，それは 1 位の零点であることがわかる．同時に $\mathbb{H}$ 上で ϕ は零点を持たないこともわかる．よって f/ϕ は $\mathbb{H}$ 上正則でウエイト $k-6$ の保型形式である．実際カスプでの状況をみると，カスプ $s = \infty, 0, -\frac{1}{2}$ で

$$f = a_{n_0} q_s^{n_0} + \cdots , \qquad (n_0 \geq 1)$$
$$\phi = b_1 q_s^1 + \cdots \qquad (b_1 \neq 0)$$

の形となるので，

$$f/\phi = \frac{a_{n_0} q_s^{n_0} + \cdots}{b_1 q_s^1 + \cdots} = \frac{a_{n_0} q_s^{n_0 - 1} + \cdots}{b_1 + b_2 q_s^1 + \cdots} = a'_{n_0} q_s^{n_0 - 1} + \cdots , \qquad (n_0 - 1 \geq 0)$$

より f/ϕ はカスプで正則である．よって

$$f/\phi \in M_{k-6}(\Gamma_0(4))$$

であり，定理 4.5 よりある $k_0 - 3$ 次多項式 Q が存在して，

$$\frac{f}{\Theta^4 F(\Theta^4 - 16F)} = Q(\Theta^4, F)$$

と書ける．ゆえに $f = \Theta^4 F(\Theta^4 16F) Q(\Theta^4, F)$ となって証明できた．

[証明終わり]

参考文献

[1] N, コブリッツ, 『楕円曲線と保型形式』 シュプリンガー・ジャパン (2006)
[2] 三宅敏恒・土井公二, 『保型形式と整数論』 紀伊国屋書店 (1976)