

目次

1	序文	2
2	問題設定と配位空間の定義	4
3	準備	6
4	配位空間のトポロジー	7

1 序文

本論文は J.O'Hara 氏による, Morse functions on configuration spaces of planar linkage という論文の解説をすることを目的としている.

平面上を移動するロボットの配位空間について考える. そのロボットは長さが 2 の n 本のアームを持つ. アームの中心には回転する継ぎ目があり, アームの端点は半径 R の円周上に等しく n 個固定されている. ロボットの配置は以下の図のようになっている.

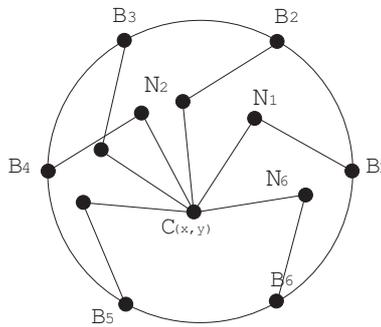


図 1.1:

このような平面的なメカニズムを持つロボットの配位空間について考える. ロボットの配位空間を $\mathcal{M}_n(R)$ とする. 陰関数の定理を用いて, $\mathcal{M}_n(R)$ が多様体であることを証明する. さらにこの位相型をモースの定理を使うことで与えることにより, $\mathcal{M}_n(R)$ の種数を決定する.

以上の方法により導かれた定理が以下の 2 つの定理である.

定理 1.1 (Toma) 配位空間 $\mathcal{M}_2(R)$ は $0 < R < 1$ の時に種数 4 の向き付け可能な面と微分同相であり, $1 < R < 2$ の時に球面と微分同相である.

定理 1.2 (O'Hara) 配位空間 $\mathcal{M}_n(R)$ は $0 < R < 1$ の時, 向き付け可能な $1 - 2^{n-1} + n2^{n-3} + n2^{n-1}$ 個の種数を持つ閉曲面と微分同相であり, $1 < R < 2$ の時に向き付け可能な $1 - 2^{n-1} + n2^{n-3}$ 個の種数を持つ閉曲面と微分同相である.

次に本論文の構成について述べる．第 2 章では配位空間を定義する．第 3 章では多様体の判定条件と陰関数定理とモースの定理を挙げる．第 4 章では，まず陰関数定理を使い配位空間が多様体であることを証明する．次に配位空間におけるモース関数の臨界点を求める．そして，モース関数の Hesse 行列の指数を求めて種数を調べる．

最後にこの論文を作成するにあたり，ご多忙にも関わらずにご丁寧にご指導いただきました片桐民陽先生と論文作成にあたりいろいろとお世話いただいた小林毅先生に深く御礼申し上げます．

2 問題設定と配位空間の定義

平面上を移動するロボットの配位空間について考える. そのロボットは回転する継ぎ目を持ち, 端点が固定されているアームを持つ. さらにアームは交わることができるものとする. ロボットは n 個のアームを持つ. そのアームの長さは 2 でありアームの中央に継ぎ目がある場合について考える. またアームの端点は半径 R の円周上に等しく n 個配置されている. ロボットのリンクの配位空間を $\mathcal{M}_n(R) = \{(C, N_1, \dots, N_n) \in (\mathbb{R}^2)^{n+1}; |N_k C| = |B_k N_k| = 1 (k = 1, \dots, n)\}$ で表す. ロボットの本体を $C(x, y)$ と表す.

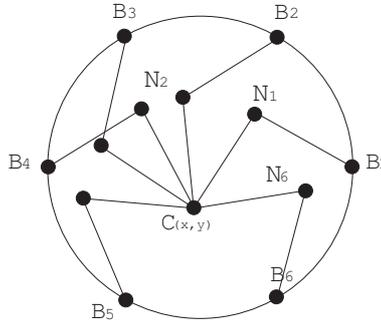


図 2.2:

$$B_k = (u_k, v_k) = \left(R \cos \frac{2(k-1)\pi}{n}, R \sin \frac{2(k-1)\pi}{n} \right)$$

B_k は固定されたアームの端点, N_k はアームの継ぎ目を表している, それぞれの座標を $B_k = (u_k, v_k)$, $N_k = (p_k, q_k)$ とする.

$k = 1, 2, \dots, 2n$ に対して関数 $f_k : \mathbb{R}^{2(n+1)} \rightarrow \mathbb{R}$ を以下のように定義する.

$$f_{2j-1}(x, y, p_1, q_1, \dots, p_n, q_n) = |N_j C|^2 - 1 = (x - p_j)^2 + (y - q_j)^2 - 1$$

$$f_{2j}(x, y, p_1, q_1, \dots, p_n, q_n) = |B_j N_j|^2 - 1 = (p_j - u_j)^2 + (q_j - v_j)^2 - 1$$

また, 関数 $F : \mathbb{R}^{2(n+1)} \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$ を以下のように定義する.

$$F = (f_1, f_2, \dots, f_{2n})$$

更に, 平面のリンクにおける配位空間 $\mathcal{M}_n(R)$ を以下のように定義する.

$$\mathcal{M}_n(R) = \{(C, N_1, \dots, N_n) \in (\mathbb{R}^2)^{n+1}; |N_k C| = |B_k N_k| = 1 (k = 1, \dots, n)\} \quad (2.1)$$

$$= \{\mathbf{x} = (x, y, p_1, q_1, \dots, p_n, q_n) \in \mathbb{R}^{2(n+1)}; F(\mathbf{x}) = 0\} \quad (2.2)$$

3 準備

定理 3.1 陰関数の定理

$f: \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ を縦軸 \mathbb{R}^n に制限した写像 $f|_{\mathbb{R}_0^n}: \mathbb{R}_0^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ の点 y_0 におけるヤコビ行列 $J(f|_{\mathbb{R}_0^n})_{y_0}$ が正則行列なら、横軸 \mathbb{R}_0^m における x_0 の開近傍 W と C^r 級写像 $\varphi: W \rightarrow \mathbb{R}^n$ が存在して、次の (1)(2) が成り立つ

1. 任意の $x \in W$ について、 $f(x, \varphi(x)) = z_0$,
2. $(J\varphi)_{x_0} = -J(f|_{\mathbb{R}_0^n})_{y_0}^{-1} J(f|_{\mathbb{R}_0^m})_{x_0}$

ただしヤコビ行列は $\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n$ の自然な座標に関して計算するものとする。

陰関数の定理を用いると次の定理が成り立つ。

定理 3.2 $f: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^k$ を C^∞ 級関数、

$$\mathcal{M} = \{x \in \mathbb{R}^m | f(x) = 0\}$$

とする。このとき任意の $p \in \mathcal{M}$ に対して

$$\text{rank}(Jf)_k = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_m} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial f_k}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_k}{\partial x_m} \end{pmatrix} = k$$

ならば \mathcal{M} は $(m - k)$ 次元 C^∞ 級多様体となる。

閉曲面に対するモースの定理について述べる。

定理 3.3 モースの定理 (閉曲面の場合)

\mathcal{M} を向き付けられた閉曲面とし、 $\chi(\mathcal{M})$ を \mathcal{M} のオイラー数とし、 g を \mathcal{M} の種数とする。 $f: \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$ を非退化な臨界点を持つ C^∞ 級関数とする。 α_0 を f の極小点の数、 α_1 を鞍点の数、 α_2 を極大点の数とすると $\chi(\mathcal{M}) = 2 - 2g = \alpha_0 - \alpha_1 + \alpha_2$ が成り立つ。

4 配位空間のトポロジー

命題 4.1 ∂F のヤコビ行列 F の $x \in F^{-1}(\{0\})$ における階数は $2n$ である.

証明

$$a_k = \overrightarrow{N_k C} = (x - p_k, y - q_k) \quad (4.3)$$

$$b_k = \overrightarrow{B_k N_k} = (p - u_k, q_k - v_k) \quad (4.4)$$

とおく.

$$\partial F(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} a_1 & -a_1 & 0 & \cdot & \dots & 0 \\ 0 & b_1 & -a_2 & 0 & \dots & 0 \\ a_2 & 0 & & & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ a_n & 0 & \dots & \dots & \dots & -a_n \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & b_n \end{pmatrix}$$

ある $x \in F^{-1}(\{0\})$ が存在して $\text{rank } F(\mathbf{x}) < 2n$ であるとする.

$$\partial f_k(\mathbf{x}) = \left(\frac{\partial f_k}{\partial x}, \frac{\partial f_k}{\partial y}, \dots, \dots, \frac{\partial f_k}{\partial q_n} \right)$$

とおく.

仮定より, $\partial f_1(x), \partial f_2(x), \dots, \dots, \partial f_{2n}(x)$ は一次従属である.

よってある $(c_1, c_2, \dots, c_{2n}) \neq (0, \dots, 0)$ 存在して

$$c_1 \partial f_1(x) + c_2 \partial f_2(x) + \dots + c_{2n} \partial f_{2n}(x) = 0$$

が成り立つ.

これより,

$$c_1 a_1 + c_3 a_2 + \dots + \dots + c_{2n-1} a_n = 0 \quad (4.5)$$

$$-c_{2j-1} a_j + c_{2j} a_n = 0 \quad (j = 1, \dots, n) \quad (4.6)$$

$$(4.7)$$

となる.

もし全ての $j = 1, \dots, n$ に対して $c_{2j-1} = 0$ ならば $c_{2j} = 0$ となり, $c_1 = c_2 = \dots = c_{2n} = 0$ より仮定に矛盾する. よってある $j \in 1, 2, \dots, n$ が存在して $c_{2j-1} \neq 0$ である. この時 $|a_j| = |b_j| = 1$ より, $a_j = \pm b_j$ が成り立つ.

$$a_j = \sum_{i \neq j}^n \left(\frac{c_{2j-1}}{c_{2i-1}} \right) a_i$$

j と異なる i が存在して $c_{2i-1} \neq 0$ が成り立ち, $a_i = \pm b_i$ となる

$a_j = \pm b_j$ かつ $a_i = \pm b_i$ が成り立つということは 2 本のアームが折れ曲がる, もしくは同じベクトルに伸びるという配置を取る. いずれの配置も $0 < R < 1$ の場合に幾何学的にあり得ないので矛盾する.

以上により, 全ての $x \in F^{-1}(\{0\})$ に対して $\text{rank } F(x) = 2n$ が成り立つ.

系 4.2 配位空間 $\mathcal{M}_n(R) = F^{-1}(\{0\})$ は $\mathbb{R}^{(2n+2)}$ 内の向き付け可能なコンパクトで境界のない連結な 2 次元部分可能多様体である.

証明 $F : \mathbb{R}^{2n+2} \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$ が与えられ $F^{-1}(\{0\}) = \mathcal{M}_n(R)$ である. $\partial F(x) = 2n$ であるので \mathcal{M} は $(2n+2) - (2n) = 2$ で 2 次元多様体であることがわかる. 更に, \mathcal{M} は有界閉集合であることがわかるので \mathcal{M} は向き付け可能な閉曲面であり, $\mathcal{M}_n(R)$ は連結である. よって系が証明される.

定理 4.3 (Toma) 配位空間 $\mathcal{M}_2(R)$ は $0 < R < 1$ の時に種数 4 の向き付け可能な面と微分同相であり, $1 < R < 2$ の時に球面と微分同相である.

$\mathcal{M}_n(R)$ 上のモース関数を構成しながら定理 1.1 の証明を与える.

命題 4.4 モース関数 $\psi : \mathcal{M}_n(R) \rightarrow R$ を $\psi(x, y, p_1, q_1, p_2, q_2) = y$ として $\mathcal{M}_2(R)$ 上に構成する.

関数 ψ の臨界点の数と指数は R が 1 より大きいのかそれ以下であるかによって決まる.

1. $1 < R < 2$ で指数 0 か 2 の時, 臨界点は 1 個
2. $0 < R < 1$ で指数 0 の時臨界点は 1 個
 指数 1 の時, 臨界点は 8 個
 指数 2 の時, 臨界点は 1 個

証明 空間 $\langle \partial f_k(x) \rangle$ を $\partial f_1(x), \partial f_2(x), \partial f_3(x), \partial f_4(x)$ によって張られた線形空間 \mathbb{R}^6 であるとする. \mathcal{M}_2R の接平面空間 $T_x\mathcal{M}_2(R)$ は x において $\langle \partial f_k(x) \rangle$ と直交している. $\mathcal{M}_2(R)$ 上の $x = (x, y, p_1, q_1, p_2, q_2)$ はベクトル $\partial\psi(x) = (0, 1, 0, 0, 0, 0)$ が $T_x\mathcal{M}_2(R)$ と直交している時に限り ψ の臨界点となる.

つまり, x が ψ の臨界点であるということは, 以下の二点を満たす

1. $\psi(x) \notin T_x\mathcal{M}_2(R)$
2. $\psi(x) \in \text{span}(\partial f_1, \partial f_2, \partial f_3, \partial f_4)$

今, $e_2 = (0, 1)$ とすると, $\psi(x) = (e_2, 0, 0)$ となる. $\mathcal{M}_2(R)$ 上の $x = (x, y, p_1, q_1, p_2, q_2)$ はベクトル $\partial\psi(x) = (e_2, 0, 0)$ が $T_x\mathcal{M}_2(R)$ と直交している時に限り ψ の臨界点となる. $(e_2, 0, 0)$ が $\text{span} \langle f_k(x) \rangle = \langle (a_1, -a_1, 0), (0, b_1, 0), (a_2, 0, -a_2), (0, 0, b_2) \rangle$ に含まれているときに限る, ということである.

つまり,

$$\psi(x) = (e_2, 0, 0) = c_1(a_1, -a_1, 0) + c_2(0, b_1, 0) + c_3(a_2, 0, -a_2) + c_4(0, 0, b_2)$$

\Leftrightarrow

$$e_2 = c_1a_1 + c_3a_2 - c_1a_1 + c_2b_1 = 0 - c_3a_2 + c_4b_2 = 0$$

これらを同時に満たしているという事になる. よって x は以下の3点を満たしている時のみ臨界点になる.

1. $a_1 = \pm e_2$ かつ $a_1 = \pm b_1$
2. $a_2 = \pm e_2$ かつ $a_2 = \pm b_2$
3. $a_1 = \pm b_1$ かつ $a_2 = \pm b_2$ かつ $a_1 \neq \pm a_2$

$1 < R < 2$ の場合, 上の式の1, 2式は幾何学的にあり得ない. $0 < R < 1$ の時のみ1, 2は成り立ち $0 < R < 2$ の場合は3が成り立つ.

3式の場合を考える. 臨界点 x の座標は以下ようになる.

$$\mathbf{x} = (x, y, p_1, q_1, p_2, q_2) \tag{4.8}$$

$$= \left(0, \pm\sqrt{4-R}, \frac{R}{2}, \pm\frac{1}{2}\sqrt{4-R^2}, -\frac{R}{2}, \pm\frac{1}{2}\sqrt{4-R^2} \right) \tag{4.9}$$

上の式は \pm の部分で全て正になるか負になるかどちらかである, よって臨界点 x は2個存在することがわかる.

補題 4.5 $x_0 = \left(0, \sqrt{4-R}, \frac{R}{2}, \frac{1}{2}\sqrt{4-R^2}, -\frac{R}{2}, \frac{1}{2}\sqrt{4-R^2}\right)$ とすると, x_0 は, 指数 2 の ψ の臨界点である.

証明 上のように臨界点が与えられているときの配置は以下の図のようになる.

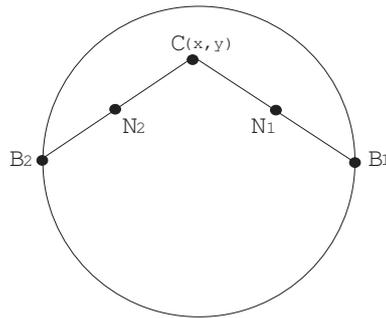


図 4.3:

$x_0 \in \mathcal{M}_n(R)$ の近傍において $\mathcal{M}_2(R) = F^{-1}(\{0\})$ の局所座標となる関数 $\xi = \xi(x)$ と $\eta = \eta(x)$ を定義する.

ただし, $\xi = \xi(x_0)$ と $\eta = \eta(x_0)$, $f_1(x_0), f_2(x_0), f_3(x_0), f_4(x_0)$ によって張られた線形空間 \mathbb{R}^6 の次元が 6 の時に限る. ξ_i は $i = 1, 2$ に対して $b_i = \overline{B_i N_i}$ の x 座標とし $(\xi_1, \xi_2) = (P_1 - R, P_2 + R)$ とする. また (ξ_1, ξ_2) は x_0 の周りに $\mathcal{M}_n(R)$ の局所座標を持つ事を意味する.

$$\rho = |N_1 N_2|$$

$$\rho = \sqrt{(2R + \xi_1 - \xi_2)^2 + \left(\sqrt{1 - \xi_1^2} - \sqrt{1 - \xi_2^2}\right)^2}$$

なぜならば, $N_1 = (p_1, q_1), N_2 = (p_2, q_2)$ より,

$$|N_1 N_2| = \sqrt{(p_1 - p_2)^2 + (q_1 - q_2)^2}$$

$$p_1 - p_2 = \xi_1 - \xi_2 + 2R$$

$$q_1 = \sqrt{1 - \xi_1^2}, q_2 = \sqrt{1 - \xi_2^2}$$

より

$$q_1 - q_2 = \sqrt{1 - \xi_1^2} - \sqrt{1 - \xi_2^2}$$

以上により,

$$\begin{aligned} \rho &= \sqrt{(2R + \xi_1 - \xi_2)^2 + \left(\sqrt{1 - \xi_1^2} - \sqrt{1 - \xi_2^2}\right)^2} \\ &= \sqrt{(p_1 - p_2)^2 + (q_1 - q_2)^2} \\ &= |N_1 N_2| \end{aligned}$$

であることがわかる.

次に x_0 の近傍において. モース関数 ψ を構成する.

この時, 次の図のようにアームの配置を少しずらすことにより点 C の y 座標を求めることが出来る.

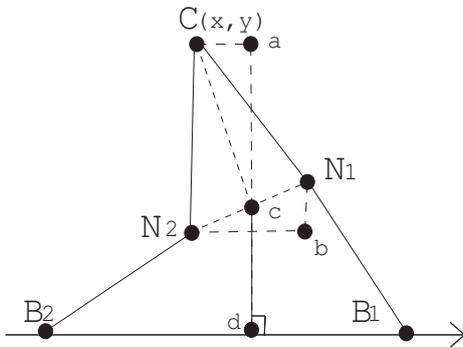


図 4.4:

上の図において三角形 caC と三角形 N_2bN_1 が相似であることを利用する. $\psi = y$ は ξ_1, ξ_2 より

$\frac{1}{2}(\sqrt{1-\xi_1^2} + \sqrt{1-\xi_2^2})$ は直線 cd の長さ, $\frac{2R+\xi_1-\xi_2}{\rho}\sqrt{1-\frac{\rho^2}{4}}$ は直線 ac の長さであることを利用するとモーヌ関数は次のようになる.

$$y = \psi(\xi_1, \xi_2) = \frac{1}{2} \left(\sqrt{1-\xi_1^2} + \sqrt{1-\xi_2^2} \right) + \frac{2R+\xi_1-\xi_2}{\rho} \sqrt{1-\frac{\rho^2}{4}} \quad (4.10)$$

(1.3) は $C(x, y)$ の y 座標を示しており $\psi(\xi_1, \xi_2)$ は $\mathcal{M}_n(R)$ 上のモーヌ関数である. H_{ij} を x における ψ の Hesse 行列 H の ij 成分を $H_{ij} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi_i \partial \xi_j} \left(-\frac{R}{2}, \frac{R}{2} \right)$ とする.

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi_1^2} = - \left(1 - \frac{R^2}{4} \right)^{-\frac{3}{2}}$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi_2^2} = - \left(1 - \frac{R^2}{4} \right)^{-\frac{3}{2}}$$

いま $1 < R < 2$ なので上の値は負になる.

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi_1 \partial \xi_2} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi_2 \partial \xi_1} = 0 \text{ より}$$

$$H_{11} = H_{22} = - \left(1 - \frac{R^2}{4} \right)^{-\frac{3}{2}} < 0$$

$$H_{12} = H_{21} = 0$$

$$H = \begin{pmatrix} - \left(1 - \frac{R^2}{4} \right)^{-\frac{3}{2}} & 0 \\ 0 & - \left(1 - \frac{R^2}{4} \right)^{-\frac{3}{2}} \end{pmatrix}$$

$\psi(\xi_1, \xi_2)$ の対角成分に負のものが 2 個あるので臨界点 x_0 の指数は 2 であることがわかる。

これにより証明が出来た。

同様にして $\bar{x}_0 = \left(0, -\sqrt{4-R^2}, \frac{R}{2}, -\frac{1}{2}\sqrt{4-R^2}, -\frac{R}{2}, -\frac{1}{2}\sqrt{4-R^2} \right)$ についても計算する。この場合の配置は以下の図のようになる。

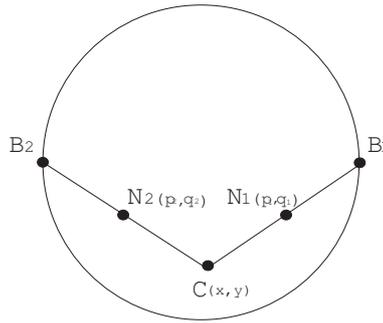


図 4.5:

x_0 が上のように与えられている。この時 $\overrightarrow{B_1 N_1}$ の x 座標を ξ_3 、 $\overrightarrow{B_2 N_2}$ の x 座標を ξ_4 とする。

$$\rho = |N_1 N_2| = \sqrt{(2R + \xi_3 - \xi_4)^2 + \left(\sqrt{1 - \xi_3^2} - \sqrt{1 - \xi_4^2} \right)^2}$$

であるから \bar{x}_0 におけるモース関数 $\psi(\xi_3, \xi_4) = y$ は以下のようにになる。

$$\psi(\xi_3, \xi_4) = -\frac{1}{2} \left(\sqrt{1 - \xi_3^2} + \sqrt{1 - \xi_4^2} \right) - \frac{2R + \xi_3 - \xi_4}{\rho} \sqrt{1 - \frac{\rho^2}{4}}$$

$$H = \begin{pmatrix} \left(1 - \frac{R^2}{4} \right)^{-\frac{3}{2}} & 0 \\ 0 & \left(1 - \frac{R^2}{4} \right)^{-\frac{3}{2}} \end{pmatrix}$$

H_{ij} は対角成分が正なので、臨界点 x_0 は指数が 0 である事が示せた。

補題 4.6 $x_1 = (R, 0, R, 1, 0, \sqrt{1-R^2})$ として臨界点 x_1 の指数は 1 である .

証明 命題 1.2 の (1) $a_1 = \pm e_2, a_1 = \pm b_1$ の場合の臨界点

x_1 は $0 < R < 1$ の時 $x_1 = (R, 0, R, 1, 0, \sqrt{1-R^2})$ となる . 配置は以下のようになる .

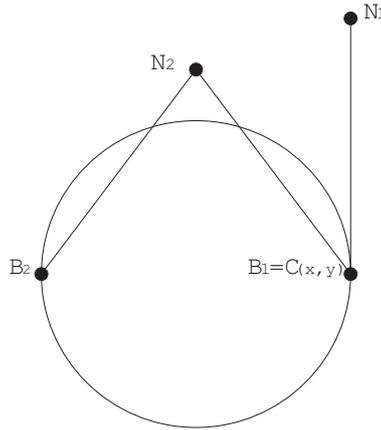


図 4.6:

前の補題と同様に考える .

$\psi = y$ とする . $(\xi_1, \xi_2) = (p_1 - R, p_2 + R)$ とすると

$$\psi(\xi_1, \xi_2) = \frac{1}{2} \left(\sqrt{1 - \xi_1^2} + \sqrt{1 - \xi_2^2} \right) - \frac{2R + \xi_1 - \xi_2}{\rho} \sqrt{1 - \frac{\rho^2}{4}}$$

となる .

次にこの $\psi(\xi_1, \xi_2)$ の x_1 における Hesse 行列 H を求めると,

$$H_{11} = 0, H_{22} < 0$$

より Hesse 行列の対角成分に負のものが 1 個存在することから , 指数が 1 である事がわかる .

定理 4.7 (O'Hara) 配位空間 $\mathcal{M}_n(R)$ は $0 < R < 1$ の時, 種数が向き付け可能な $1 - 2^{n-1} + n2^{n-3} + n2^{n-1}$ の閉曲面と微分同相であり . $1 < R < 2$ の時向き付け可能な $1 - 2^{n-1} + n2^{n-3}$ 個の種数を持つ閉曲面と微分同相である .

$n = 6$ のときに制限して考える .

命題 4.8 x における F の *Jacobi* 行列 $\partial F(x)$ の階数は $F^{-1}(\{0\}) = \mathcal{M}_6(R)$ である時に 12 である .

証明 $0 < \mathbb{R} < 2$ で, 関数 $f_k : \mathbb{R}^{2(6+1)} \rightarrow \mathbb{R}$ を定義する . $\partial f_k (k = 1, \dots, 12)$ が一次従属であると仮定する .

$$F = (f_1, f_2, \dots, \dots, f_{12})$$

とする .

つまり零行列でない行列 $(c_1, c_2, \dots, c_{12})$ が存在して $\sum_{k=1}^{12} c_k \partial_k f_k = 0$ が成り立つと仮定する .

$$a_k = \overrightarrow{N_k C}, \quad b_k = \overrightarrow{B_k N_k}$$

であるとき,

$$\partial f_1 = (a_1, -a_1, 0, \dots, 0)$$

$$\partial f_2 = (0, b_1, 0, \dots, 0)$$

$$\partial f_3 = (a_2, 0, -a_2, 0, \dots, 0)$$

.....

$$\partial f_{12} = (0, \dots, 0, 0, b_6)$$

となる .

c_1, \dots, c_{12} のうちで c_i (i は奇数), c_j (j は偶数) とする .

もしも, すべての c_i が 0 であるならば, すべての c_j は 0 となり $c_1, c_2, \dots, c_{12} = 0$ となり仮定に矛盾するので, 少なくとも 1 つの c_i が 0 でないと仮定する .

仮に今 $c_1 \neq 0$ であるとする $c_2 \neq 0$ となり $a_1 = \pm b_1$ となる

よって .

$$a_1 = - \left(\frac{c_3}{c_1} \right) a_2 - \dots - \left(\frac{c_{11}}{c_1} \right) a_6$$

となりベクトル a_n はゼロベクトルではない。

ある c_i ($i = 3, 5, 7, 9, 11$) は 0 ではない。仮に今この c_i を c_5 とし $c_5 \neq 0$ とすると $a_3 = \pm b_3$ となる。

よって $a_1 = \pm b_1, a_3 = \pm b_3$ を満たす配置が考えられる。つまり 2 本のアームが伸びる状態になるか、折れ曲がる状態になる。

しかし、 $0 < R < 2, R \neq 1$ より幾何学的にそのような配置は不可能である。よって $\partial f_k (k = 1, \dots, 12)$ が一次従属であるという仮定に矛盾する。

よって $\partial f_1, \partial f_2, \dots, \partial f_{12}$ は一次独立である。

つまり $\text{rank} F(x) = 12$ なので陰関数定理より $n = 6$ の場合も $\mathcal{M}_6(R)$ は閉 2 次元微分可能多様体である。

命題 4.9 $\psi(x, y, p_1, q_1, p_2, \dots, q_6) = y$ を $\mathcal{M}_6(R)$ 上のモース関数とする。

ψ の臨界点と指数は R が 1 より大きい小さいかによって定まる。

1. $1 < R < 2$ ならば指数 0, 臨界点は 16

指数 1, 臨界点は 64 個

指数 2, 臨界点は 16 個

2. $0 < R < 1$ ならば指数 0 の臨界点は 16 個

指数 1 の臨界点は 448 個, 指数 2 の臨界点は 16 個

証明 $x = (x, y, p_1, q_1, \dots, q_6)$ は $\psi = y$ の臨界点とする。いくつかの c_k に対して $\sum_{k=1}^{12} c_k \partial_k f_k = (e_2, 0, \dots, 0)$ が成り立っている。少なくとも $c_1, c_3, c_5, c_7, c_9, c_{11}$ のうちの 1 個は 0 ではない。0 でない c_{2j-1} の値により 3 つの場合がある。

Case1: 6 個ある c_{2j-1} のうち 1 個だけが 0 でない。

Case2: 6 個ある c_{2j-1} のうち 2 個だけが 0 でない。

Case3: 6 個ある c_{2j-1} のうち 2 個以上が 0 でない。

まず Case1 の場合から考える。

6 個ある c_{2j-1} のうち 1 個だけが 0 でないと仮定しその値を c_{2k-1} とする。仮に $k = 1$ であるとすると $c_3, c_5, c_7, c_9, c_{11} = 0$ である。よって

$$c_1 a_1 = e_2$$

$$-c_1 a_1 + c_2 b_1 = 0$$

$$c_3, c_5, c_7, c_9, c_{11} = 0$$

が同時に成り立ち

$$a_1 = \pm b_1 = \pm e_2$$

という式が導かれる一般に戻すと

$$a_k = \pm b_k = \pm e_2$$

となる .

1. $a_k = b_k = \pm e_2$
この場合 $0 < R < 2$ という条件に矛盾する
2. $a_k = -b_k = \pm e_2$
 $0 < R < 1$ の場合のみ成り立つ .

上の (2) の場合 a_1, \dots, a_6 から 1 個選ぶのが 6 通り, 選んだ a_k が $a_k = \pm e_2$ となるので 2 通り, 残りの 5 本のアームが上か下かにより 2^5 通りある .

よって $6 \times 2 \times 2^5 = 384$ より Case(1) で $a_k = -b_k = \pm e_2$ の場合, 384 通りの配置がある .

補題 4.10 上の Case(1) で $0 < R < 1$ の時 $a_k = -b_k = \pm e_2$ となる場合を考える . $C = B_k$ である $a_k = -b_k = \pm e_2$ があるならば $x = (x, y, p_1, q_1, p_2, \dots, q_6)$ は指数 1 の関数 ψ の臨界点である

証明 対称性により以下の 3 つの場合に分けて考える .

1. $k = 1$ かつ $a_1 = -b_2 = e_2$ の場合
 $(\xi_1, \xi_2) = (p_1 - R, p_4 + R)$ として x の近傍に局所座標を取る . この場合の配置は以下のようなになる .

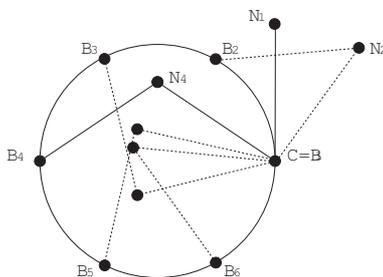


図 4.7:

モース関数 ψ を構成する . $N_1 = (R, 1), N_4 = (0, \sqrt{1-R^2}), \rho = |N_1 N_4|$ のとき

$$\psi(\xi_1, \xi_2) = \frac{1}{2} \left(\sqrt{1-\xi_1^2} + \sqrt{1-\xi_2^2} \right) - \frac{2R + \xi_1 - \xi_2}{\rho} \sqrt{1 - \frac{\rho^2}{4}} = y$$

となる . 次にこの $\psi(\xi_1, \xi_2)$ の Hesse 行列 H を考える .

$(\xi_1, \xi_2) = (0, R)$ のとき $H_{11} = 0, H_{22} < 0$ となり対角成分に負のものが 1 個並ぶので臨界点 x の指数は 1 である事が証明出来た .

2. $k = 2$ かつ $a_2 = -b_2 = e_2$ の場合
この場合の配置は次のようになる .

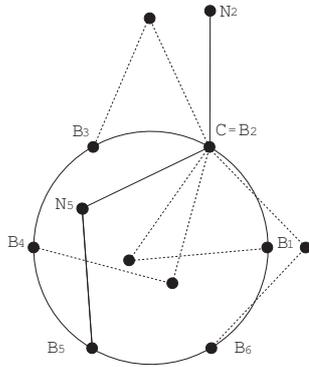


図 4.8:

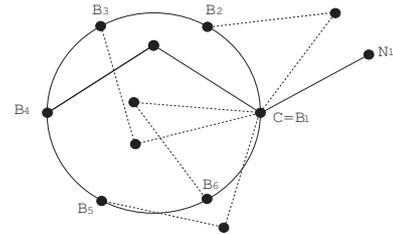


図 4.9:

$-\frac{\pi}{3}$ 回転した後の C の座標を (x', y') とし回転する前の C の座標を (x, y) とすると以下のように表せる .

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \frac{\pi}{3} & \sin \frac{\pi}{3} \\ \sin \frac{\pi}{3} & \cos \frac{\pi}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}x' - \frac{\sqrt{3}}{2}y' \\ \frac{\sqrt{3}}{2}x' + \frac{1}{2}y' \end{pmatrix}$$

となり y 座標にあたる成分に注目する.

$$\varphi : \mathcal{M}_6(R) \rightarrow \mathbb{R}, \varphi = \frac{\sqrt{3}}{2}x' + \frac{1}{2}y' = y$$

$$a_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}e_1 + \frac{1}{2}e_2 = -b_1$$

$(\xi_1, \xi_2) = (p_1 - R, p_4 + R)$ という局座標を取る. 次の図のようにアームの配置を少しずらすことにより, (x', y') の座標を求める. このとき三角形 aN_4N_1 と三角形 cbC が相似であることを利用する.

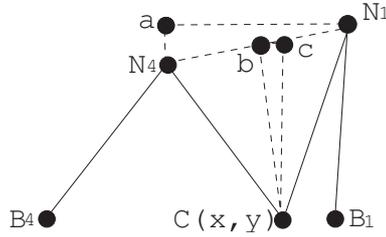


図 4.10:

$$y' = \psi(\xi_1, \xi_2) = \frac{1}{2} \left(\sqrt{1 - \xi_1^2} + \sqrt{1 - \xi_2^2} \right) + \frac{2R + \xi_1 - \xi_2}{\rho} \sqrt{1 - \frac{\rho^2}{4}}$$

$$x' = \frac{\xi_1 + \xi_2}{2} + \frac{\sqrt{1 - \xi_1^2} - \sqrt{1 - \xi_2^2}}{\rho} \sqrt{1 - \frac{\rho^2}{4}}$$

よってモース関数 φ は以下の式になる

$$\begin{aligned} \varphi = & \frac{\sqrt{3}}{2} \left(\frac{1}{2} \left(\sqrt{1 - \xi_1^2} + \sqrt{1 - \xi_2^2} \right) + \frac{2R + \xi_1 - \xi_2}{\rho} \sqrt{1 - \frac{\rho^2}{4}} \right) \\ & + \frac{1}{2} \left(\frac{\xi_1 + \xi_2}{2} + \frac{\sqrt{1 - \xi_1^2} - \sqrt{1 - \xi_2^2}}{\rho} \sqrt{1 - \frac{\rho^2}{4}} \right) \end{aligned}$$

このモース関数 φ の Hesse 行列 H を求めると

$$\frac{\partial^2 x}{\partial \xi_1^2} = \frac{\partial^2 y}{\partial \xi_1^2} = 0$$

$$\frac{\partial^2 x}{\partial \xi_1 \partial \xi_2} < 0, \frac{\partial^2 y}{\partial \xi_1 \partial \xi_2} < 0$$

となることから $k = 2$ かつ $a_2 = -b_2 = e_2$ の場合, 臨界点の指数は 1 である.

3. $k = 2$ かつ $a_1 = -b_2 = -e_2$ の場合

この場合の配置は以下ようになる. 上の (2) の場合と同様に $-\frac{\pi}{3}$ 回転させることにより, モース関数を構成し Hesse 行列 H を計算すると, 指数が 1 であることがわかる.

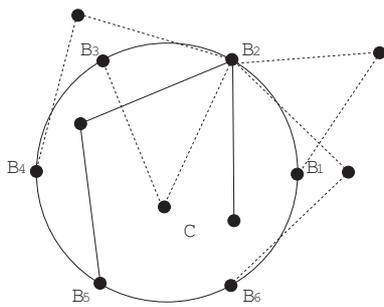


図 4.11: test1

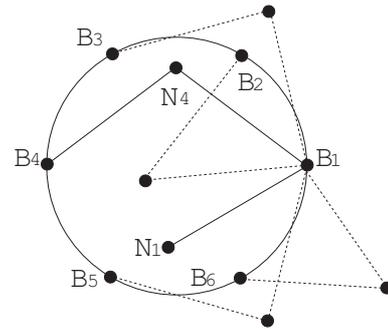


図 4.12: test2

Case2

c_{2j-1} と c_{2i-1} のちょうど 2 個のみが 0 でない場合

$\sum_{k=1}^{12} c_k \partial_k f_k = (e_2, 0, \dots, 0)$ において, 仮に $c_1 \neq 0, c_3 \neq 0$ とすると

$$c_4 = c_6 = c_8 = c_{10} = c_{12} = 0$$

$$c_1 a_1 + c_3 a_3 = e_2$$

$$-c_1 a_1 + c_2 b_1 = 0$$

$$c_3 a_2 + c_4 b_2 = 0$$

が同時に成り立つ．

これより

$$a_1 = -\frac{c_2}{c_1}b_1, a_2 = -\frac{c_4}{c_3}b_2$$

となる．つまり $i \neq j$ のとき c_{2i-1} と c_{2j-1} がゼロでないとする．

$a_i = \pm b_i, a_j = \pm b_j$ が成り立つ．

仮に $a_i = -b_i$ かつ $a_j = b_j$ となるときのことを考える．つまりアームの一つが伸びてもう一方のアームが折れ曲がるという配置を考える．

このとき $C = N_i$ かつ $a_j = b_j$ この状態は $R = 1$ 対し $|CB_k| > 2$ となり幾何学的に不可能な配置になる．同様に $a_i = b_i$ かつ $a_j = -b_j$ もありえない配置となる．よって $a_i = b_i$ かつ $a_j = b_j$ となる．幾何学的な立場からすると $|i - j| = \pm 1$ かつ $\overrightarrow{B_i N_i} = \overrightarrow{N_i C}$ かつ $\overrightarrow{B_j N_j} = \overrightarrow{N_j C}$ というベクトルが内側へ向く配置が考えられる．

これらを満たす配置を以下の3パターンに分けて考える．

1. $\{i, j\} = \{5, 6\}$ の場合

x の周りの局座標系をとり $b_6 = \overrightarrow{B_6 N_6}, b_5 = \overrightarrow{B_5 N_5}$ をとることができる．この配置においては臨界点は $2^4 = 16$ より 16 個存在する．

アームの配置を少しずらすことによりロボットの座標である (x, y) を求めモース関数を構成する．

このときモース関数は次のようになる．

$$\xi_5 = p_5 + \frac{R}{2}$$

$$\xi_6 = p_6 - \frac{R}{2}$$

のとき

$$y = -\frac{R\sqrt{3}}{2} + \frac{\xi_6 - \xi_5 + R}{\rho} \sqrt{1 - \frac{\rho^2}{4}} + \frac{\sqrt{1 - \xi_6^2} + \sqrt{1 - \xi_5^2}}{2}$$

となり、モース関数 y の Hesse 行列 H を求める． $\xi_5 = \frac{R}{4}, \xi_6 = -\frac{R}{4}$ のとき

$$H = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \left(1 - \frac{R^2}{16}\right)^{-\frac{3}{2}} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \left(1 - \frac{R^2}{16}\right)^{-\frac{3}{2}} \end{pmatrix}$$

となり, $H_{11} < 0$, $H_{22} < 0$ より指数が 2 となることがわかった.

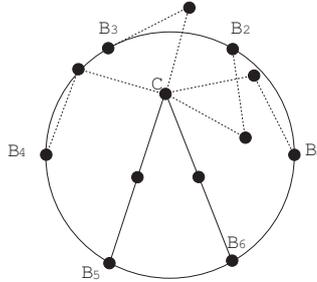


図 4.13:

2. $\{i, j\} = \{2, 3\}$ の場合

$\{i, j\} = \{5, 6\}$ の場合と同様に考える. x の周りの局座標系をとり, $b_2 = \overrightarrow{B_2N_2}$, $b_3 = \overrightarrow{B_3N_3}$ ととることができる. この配置においては臨界点は $2^4 = 16$ より 16 個存在する.

アームの配置を少しずらすことによりロボットの座標である (x, y) を求めモース関数を構成する.

$$\xi_2 = p_2 - \frac{R}{2}$$

$$\xi_3 = p_3 + \frac{R}{2}$$

とする.

モース関数は以下のようなになる.

$$\psi = \frac{R\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{1-\xi_3^2} + \sqrt{1-\xi_2^2}}{2} - \frac{(\xi_2 - \xi_3 + R)\sqrt{1-\frac{\rho^2}{4}}}{\rho}$$

モース関数 ψ の Hesse 行列 H を求める. $\xi_2 = -\frac{R}{4}, \xi_3 = \frac{R}{4}$ のとき

$$H = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \left(1 - \frac{R^2}{16}\right)^{-\frac{3}{2}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \left(1 - \frac{R^2}{16}\right)^{-\frac{3}{2}} \end{pmatrix}$$

となり, $H_{11} > 0, H_{22} > 0$ より, 指数が 0 となることがわかった.

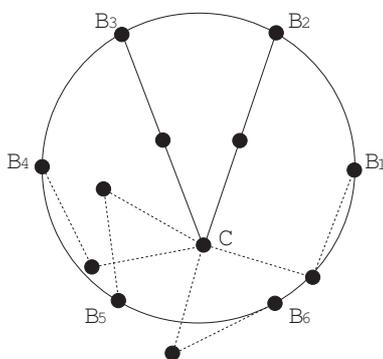


図 4.14:

3. $\{i, j\} = \{1, 2\}, \{3, 4\}, \{4, 5\}, \{6, 1\}$ の場合

この場合, $64 = 4 \times 2^4$ 個の臨界点を持つ. いま, $\{i, j\} = \{6, 1\}$ の場合を考える. $\{i, j\} = \{6, 1\}$ となる配置は次の図のようになる. $-\frac{\pi}{3}$ 回転した後の C の座標を (x', y') とし回転する前の C の座標を (x, y) とすると以下の図のようになる.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \frac{\pi}{3} & \sin \frac{\pi}{3} \\ \sin \frac{\pi}{3} & \cos \frac{\pi}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}x' - \frac{\sqrt{3}}{2}y' \\ \frac{\sqrt{3}}{2}x' + \frac{1}{2}y' \end{pmatrix}$$

となり y 座標にあたる成分に注目する

$$\varphi: \mathcal{M}_6(R) \rightarrow \mathbb{R}, \varphi = \frac{\sqrt{3}}{2}x' + \frac{1}{2}y' = y$$

$$a_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}e_1 + \frac{1}{2}e_2 = -b_1$$

$$\xi_5 = p_5 + \frac{R}{2}$$

$$\xi_6 = p_6 - \frac{R}{2}$$

として (x', y') の周りに局座標をとる． (x', y') の座標は以下のようになる．

$$y' = -\frac{R\sqrt{3}}{2} + \frac{\xi_6 - \xi_5 + R}{\rho} \sqrt{1 - \frac{\rho^2}{4}} + \frac{\sqrt{1 - \xi_6^2} + \sqrt{1 - \xi_5^2}}{2}$$

$$x' = \frac{\xi_6 - \xi_5 + R}{\rho} - \frac{\sqrt{1 - \xi_6^2} - \sqrt{1 - \xi_5^2}}{\rho} \sqrt{1 - \frac{\rho^2}{4}}$$

(x', y') の座標は上のようになり，

$$\varphi = \frac{\sqrt{3}}{2} \left(-\frac{R\sqrt{3}}{2} + \frac{\xi_6 - \xi_5 + R}{\rho} \sqrt{1 - \frac{\rho^2}{4}} + \frac{\sqrt{1 - \xi_6^2} + \sqrt{1 - \xi_5^2}}{2} \right) \quad (4.11)$$

$$+ \frac{1}{2} \left(-\frac{R\sqrt{3}}{2} + \frac{\xi_6 - \xi_5 + R}{\rho} \sqrt{1 - \frac{\rho^2}{4}} + \frac{\sqrt{1 - \xi_6^2} + \sqrt{1 - \xi_5^2}}{2} \right) \quad (4.12)$$

モーソ関数 φ は上のように構成される．モーソ関数 φ の Hesse 行列 H を $\xi_5 = \frac{R}{4}$, $\xi_6 = -\frac{R}{4}$ として求めると，各成分は以下のようになる．

$$H_{12} = H_{21} = 0$$

$$H_{11} = \frac{8\sqrt{3}}{R \left(4 - \frac{R^2}{4}\right)} - \frac{4}{\left(4 - \frac{R^2}{4}\right)^{\frac{3}{2}}} > 0$$

$$H_{22} = -\frac{8\sqrt{3}}{R \left(4 - \frac{R^2}{4}\right)} - \frac{4}{\left(4 - \frac{R^2}{4}\right)^{\frac{3}{2}}} < 0$$

以上によりモーソ関数 φ の Hesse 行列 H は， x_0 における指数が 1 となることがわかった．

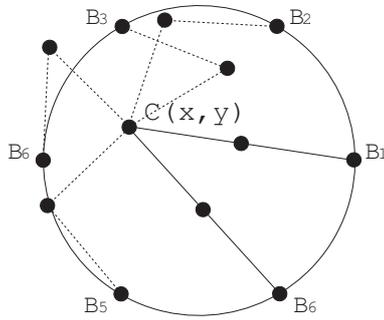


図 4.15:

Case3 の場合を考える .

6 個ある c_{2j-1} のうち 2 個以上が 0 でないと仮定する . いま , 仮に $i \neq j \neq k$ であるときに $c_{2i-1}, c_{2j-1}, c_{2k-1}$ が 0 でないと仮定する .

$$\sum_{k=1}^{12} c_k \partial_k f_k = (e_2, 0, \dots, \dots, 0)$$

において仮に $c_1 \neq 0, c_3 \neq 0, c_5 \neq 0$ とすると ,

$$c_8 = c_{10} = c_{12} = 0$$

$$c_1 a_1 + c_3 a_2 + c_5 a_3 = 1$$

$$-c_1 a_1 + c_2 b_1 = 0$$

$$-c_3 a_2 + c_4 b_2 = 0$$

$$-c_5 a_3 + c_6 b_3 = 0$$

より

$$a_1 = -\frac{c_2}{c_1} b_1$$

$$a_2 = -\frac{c_4}{c_3} b_2$$

$$a_3 = -\frac{c_6}{c_5} b_3$$

よって ,

$$a_i = \pm b_i$$

$$a_j = \pm b_j$$

$$a_k = \pm b_k$$

となる．このとき， $|i - j|, |j - k|, |k - i|$ のうちの少なくともひとつは ± 2 あるいは ± 3 となる．

以上の式より 3 本のアームがそれぞれ伸びるか，折れ曲がるかの配置をとることがわかる．しかしそのような配置は幾何学的に不可能であるため *Case 3* の場合は考えないことにする．

参考文献

- [1] D.Eldar; *Linkage Site*,[http://www.math.toronto.edu/~ drorbn/People/Eldar/thesis/default.htm](http://www.math.toronto.edu/~drorbn/People/Eldar/thesis/default.htm)
- [2] J.O'Hara; Morse functions on configuration spaces of planar linkage. arXiv:math.GT/0505462 v1 23 May 2005
- [3] J. Milnor; Morse Theory, Princeton University Press.
- [4] 松本幸夫; 多様体の基礎. 東京大学出版会.
- [5] T. Toma; *An analogue of a theorem of T.F.Harvel*, Ryukyu Math.J.6 (1993), 69-77, Correction to “ An anlogue of a theorem of T.F.Harvel”, Ryukyu Math.J.8 (1995), 95-96.